

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БАЛТИЙСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
ИММАНУИЛА КАНТА»

На правах рукописи



Носиков Игорь Анатольевич

**ПРЯМОЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД  
ДЛЯ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК  
КВ РАДИОТРАСС В ИОНОСФЕРЕ**

Специальность 01.04.03 —  
«радиофизика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук  
Клименко Максим Владимирович

Калининград — 2021

## Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАСПРОСТРАНЕНИИ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ</b> . . . . .	12
1.1 Асимптотические подходы к описанию распространения радиоволн в ионосфере . . . . .	12
1.2 Канонические уравнения Гамильтона. Задача Коши о расчете лучевых траекторий . . . . .	15
1.3 Приближение геометрической оптики в задаче распространения радиоволн. Обзор методов и моделей . . . . .	22
1.4 Граничная задача о расчете радиолучей . . . . .	24
1.4.1 Метод пристрелки . . . . .	25
1.4.2 Вариационный подход . . . . .	28
<b>Глава 2. ПРЯМОЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЛУЧЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ</b> . . . . .	34
2.1 Прямой вариационный метод для расчета радиолучей. Постановка задачи . . . . .	34
2.2 Типы экстремумов функционала радиолуча . . . . .	42
2.3 Выводы . . . . .	47
<b>Глава 3. МЕТОД ОБОБЩЕННОЙ СИЛЫ И ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ</b> . . . . .	49
3.1 Прямая минимизация . . . . .	49
3.2 Поиск седловых точек . . . . .	52
3.3 Глобальная оптимизация . . . . .	58
3.4 Выводы . . . . .	61
<b>Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА ДЛЯ РАСЧЕТА РАДИОТРАСС</b> . . . . .	63

4.1	Численное моделирование лучевых траекторий радиоволн в аналитически заданной среде . . . . .	63
4.1.1	Моделирование в параболической модели ионосферы . . . . .	63
4.1.2	Моделирование в двухслойной экспоненциальной модели ионосферы . . . . .	68
4.2	Численное моделирование радиотрасс в модели IRI-2007. Сравнение результатов расчетов с методом пристрелки . . . . .	76
4.3	Синтезирование дистанционно-частотных характеристик наклонного зондирования . . . . .	83
4.4	Выводы . . . . .	86
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>88</b>
	<b>Список сокращений и условных обозначений . . . . .</b>	<b>90</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>91</b>
	<b>Список рисунков . . . . .</b>	<b>105</b>
	<b>Приложение А. Метод проецирования скорости . . . . .</b>	<b>112</b>
	<b>Благодарности . . . . .</b>	<b>114</b>

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Распространение радиоволн в неоднородной среде от поверхности Земли до высот верхней атмосферы определяет основные сложности прогнозирования оптимального выбора характеристик приемно-передающих устройств (применимых частот, диаграмм направленности и т. д.) при решении задач радиосвязи, загоризонтной радиолокации и позиционирования навигационными спутниковыми системами. Решение данной задачи имеет как фундаментальное значение, связанное с теоретическими аспектами распространения электромагнитных волн в неоднородных анизотропных средах и интерпретацией данных вертикального и наклонного зондирования ионосферы, так и прикладное, связанное с выбором оптимальных характеристик передающих и приемных антенн. К настоящему времени в интерпретации некоторых особенностей ионограмм вертикального и наклонного зондирования ионосферы все еще остается ряд нерешенных вопросов. Причины этого кроются в отсутствии полной и достоверной информации о трехмерном распределении параметров ионосферы (среды распространения радиоволн) и сложностях, возникающих при решении задачи о расчете коротковолновых радиотрасс с заданными точками излучения и приёма.

Для решения научных задач подобного рода используются и активно развиваются современные методы моделирования, мониторинга и исследования ионосферы как среды распространения радиоволн. Динамично расширяется сеть ионозондов, станций наклонного и возвратно-наклонного зондирования, глобальная сеть приемников сигналов навигационных спутниковых систем GPS/GLONASS и др. Существенный вклад в исследование и понимание глобальной структуры ионосферы в 90-е годы XX века внесли новые радиофизические методы радиотомографии и спутникового зондирования, позволившие получать пространственно-временную картину динамики ионосферной плазмы. Большое количество накопленных экспериментальных данных послужило основой для создания региональных и глобальных моделей ионосферы, а также дало импульс для создания теорий, объясняющих физику неизученных ионосферных явлений. На данный момент одним из средств проверки разрабатываемых теорий и важнейшим прикладным инструментом является численное

моделирование. Исходя из этого, актуальной научной задачей является совершенствование и поиск новых эффективных методов численного моделирования ионосферы и распространения радиоволн. Данная диссертационная работа посвящена одному из направлений в численном моделировании распространения радиоволн – реализации нового метода расчета радиотрасс с заданными положениями передатчика и приемника сигнала в модельной ионосфере, который имеет ряд преимуществ по сравнению с уже существующими и широко используемыми подходами к решению радиофизических задач.

**Цель диссертационной работы** заключается в разработке и реализации нового подхода к расчету траекторных характеристик радиотрасс в ионосфере Земли с зафиксированными точками передатчика и приемника. Для коротких радиоволн применимо приближение геометрической оптики, основанное на вариационном принципе Ферма, согласно которому траектории радиотрасс должны удовлетворять условию стационарности фазового пути. Этот факт позволяет свести решение исходной краевой задачи к поиску стационарных точек функционала фазового пути радиолуча на основе прямой оптимизации траектории без необходимости решения вариационного уравнения и уравнения эйконала.

**Задачи диссертационной работы:**

1. Исследование применимости и преимуществ использования прямого вариационного метода для поиска различных лучевых траекторий в задаче о расчете радиотрасс в ионосфере Земли.
2. Реализация метода прямой оптимизации траектории радиолуча в модельной ионосфере в виде комплекса программ, основываясь на опыте применения вариационных методов в различных областях науки.
3. Разработка и реализация алгоритмов и методов для решения проблем выбора начального приближения и многолучевости при решении задачи ионосферного распространения радиоволн.
4. Верификация и валидация разработанного комплекса программ траекторных расчетов на основе аналитических решений, метода пристрелки и ионограмм наклонного зондирования по данным радиофизических наблюдений.

### **Научные положения, выносимые на защиту:**

1. На примере различных модельных сред показано, что верхние радиолучи соответствуют минимумам функционала фазового пути, тогда как нижние радиолучи соответствуют седловым точкам первого порядка.
2. Реализован прямой вариационный метод расчета верхних и нижних лучей, основанный на минимизации и поиске седловых точек функционала фазового пути.
3. Разработан и реализован метод глобальной оптимизации функционала для систематического поиска множества верхних и нижних лучей граничной задачи, позволяющий разрешить проблему многолучевости в случае существования горизонтальных и вертикальных неоднородностей ионосферной плазмы.
4. Создан единый комплекс программ решения граничной задачи о расчете радиотрасс в модельной ионосфере. Этот программный комплекс тестировался с использованием метода пристрелки и ионограмм наклонного зондирования ионосферы. Показаны робастность и преимущества созданного комплекса программ.

**Научная новизна работы** заключается в разработке нового подхода к расчету лучей коротких радиоволн в ионосфере, отличного от уже существующих. В данной работе впервые показано, что верхние и нижние лучи соответствуют минимумам и седловым точкам функционала фазового пути. Принципиальными отличиями разрабатываемого метода от подходов, использующих численное решение уравнения эйконала и метод пристрелки, являются:

1. строгая фиксация пространственных положений передатчика и приемника радиосигналов;
2. алгоритм прямой оптимизации траектории луча без необходимости решения уравнения эйконала;
3. возможность избирательного определения верхних и нижних лучей;
4. решение проблемы многолучевости на основе систематического поиска верхних и нижних лучей граничной задачи.

В отличие от известных подходов, основанных на применении вариационного принципа в задачах расчета радиотрасс, алгоритмы, методы и комплекс программ, представленные в данной диссертационной работе, впервые позволяют на основе единого оптимизационного подхода (метода обобщенной силы и гло-

бальной оптимизации) последовательно получать множество решений различного типа (нижние, верхние и трансионосферные радиолучи).

**Научная и практическая значимость.** Реализация нового подхода к решению задачи расчета радиотрасс в ионосфере с граничными условиями расширяет возможности моделирования и исследования динамики ионосферной плазмы и ее влияния на качество радиосвязи. Одним из достоинств прямого вариационного метода является точное выполнение граничных условий: начальная и конечная точки по определению совпадают с положениями передатчика и приёмника радиоволн. Метод позволяет осуществлять поиск множества решений в неоднородной ионосфере, где существующие численные методы решения граничной задачи могут испытывать трудности. В перспективе, разработанный метод и созданный комплекс программ могут стать эффективным инструментом в моделировании радиотрасс наклонного зондирования ионосферы и при решении задач низкоорбитальной радиотомографии, в которых требуется многократный поиск лучей с заданными точками передачи и приема. Вместе с этим модифицированный комплекс программ может быть использован для решения прикладных задач из различных областей физики, в которых применимо приближение геометрической оптики.

**Достоверность полученных результатов** определяется на основе качественного и количественного сравнения аналитических и численных решений, полученных с использованием различных методик. В частности, для простейших сред, задаваемых с помощью аналитических функций, верификация проводилась на основе известных аналитических решений. В случае использования в качестве среды распространения радиоволн эмпирических моделей ионосферы, полученные результаты расчетов радиотрасс сопоставлялись с результатами численного моделирования, полученными с использованием метода пристрелки, а также с наблюдаемыми ионограммами наклонного зондирования.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных и российских конференциях и семинарах:

1. XX-ая Региональная конференция по распространению радиоволн (г. Санкт-Петербург, СПбГУ, 2014);
2. Международная Байкальская школа по фундаментальной физике (г. Иркутск, 2015, 2017, 2019);

3. 5th, 6th International Conferences «Atmosphere, Ionosphere, Safety» (г. Зеленоградск, 2016, 2018);
4. 38th, 39th, 40th, 41st Annual Seminars «Physics of Auroral Phenomena» (г. Апатиты, ПГИ РАН, Россия, 2015, 2016, 2017, 2018);
5. International Conference on Computational Science (г. Рейкьявик, Исландия, 2015);
6. 10-ая и 11-ая ежегодная конференция «Физика плазмы в Солнечной системе» (г. Москва, ИКИ РАН, 2015, 2016);
7. 14-ая и 17-ая Всероссийская открытая конференция «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса» (г. Москва, ИКИ РАН, 2016, 2019);
8. VII международная конференция «Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений» (с. Паратунка, Камчатский край, ИКИР ДВО РАН, 2016);
9. Всероссийская открытая конференция «Распространение радиоволн» (г. Томск, ИОА СО РАН, 2016; Казань, КФУ, 2019);
10. URSI Atlantic Radio Science Conferences (г. Маспаломас, Испания, 2015, 2018);
11. URSI Asia-Pacific Radio Science Conference (г. Сеул, Республика Корея, 2016);
12. Symposium Progress in Electromagnetics Research (г. Санкт-Петербург, 2017);
13. Beacon Satellite Symposium (г. Ольштын, Польша, 2019);
14. URSI General Assembly and Scientific Symposium (г. Рим, Италия, 2020).

**Личный вклад автора.** Результаты диссертационной работы получены лично автором под руководством научного руководителя. Автором выполнены следующие работы:

1. Построены численные схемы исследования функционала фазового пути и представлено свидетельство существования минимумов и седловых точек функционала радиолуча.
2. Разработаны метод обобщенной силы и алгоритм глобальной оптимизации, направленные на поиск решений различного типа и на решение проблемы многолучевости в задаче распространения радиоволн в ионосфере.



3. На основе разработанных алгоритмов и методов реализован комплекс программ на языке C++ для расчета радиотрасс в ионосфере с последующим получением модельных дистанционно-частотных характеристик наклонного зондирования.
4. Проведены численные эксперименты по расчету траекторных характеристик радиотрасс с использованием аналитических и эмпирических моделей ионосферы. Представлены возможности эффективного применения вариационного подхода в задаче численного моделирования.
5. Осуществлена верификация и валидация созданного комплекса программ на основе аналитических решений, численных расчетов, полученных методом пристрелки, и данных радиофизических наблюдений.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 16 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК (Известия ВУЗов. Радиофизика; Advances in Space Research; Химическая физика; IEEE Transactions on Antennas and Propagation), 12 — в сборниках трудов конференций.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и одного приложения. Полный объем диссертации составляет 114 страниц с 30 рисунками. Список литературы содержит 130 наименований.

Во **введении** дана общая характеристика работы, отражена актуальность ее темы, сформулированы цели диссертации и решаемые задачи, сформулированы основные положения, выносимые на защиту, приведено краткое содержание диссертации.

**Первая глава** представляет собой обзор теоретических представлений о закономерностях распространения коротких радиоволн в ионосфере. Представлен обзор методов и численных моделей распространения радиоволн в ионосфере.

Во **второй главе** представлены постановка задачи и подробное описание вариационного подхода к расчету радиолучей, основанного на прямой минимизации функционала фазового пути. В рамках предложенного метода, исходная траектория аппроксимируется дискретным набором точек, задающих кусочно-линейное представление луча. В ходе итерационного процесса оптимизации, некоторая начальная конфигурация луча преобразуется к оптимальному виду, в соответствии с вариационным принципом Ферма. Показано, что процесс

сходимости может быть ускорен, если рассматривать только поперечные смещения точек траектории. Кроме того, для осуществления связности всей траектории вводятся фиктивные силы упругости между точками, действующие строго вдоль траектории. Предложенный вариант вариационного метода, основанный на минимизации функционала, позволяет определять верхние и трансферные лучи. Для исследования проблемы определения нижних лучей вариационным подходом, была предложена процедура экспресс анализа, позволяющая исследовать функционал фазового пути. Результаты численных расчетов показали, что проблема нахождения нижних лучей на основе минимизации функционала связана с седловым характером экстремума данных решений.

**В третьей главе** представлен обобщенный метод оптимизации функционала фазового пути, позволяющий определять как минимумы, так и седловые точки первого порядка. Реализация прямой минимизации отличается от поиска седловых точек только способом расчета вектора «обобщенной» силы, задающей направление сходимости к оптимуму. В рамках метода обобщенной силы, определение седловых точек первого порядка основано на расчете гессиана функционала и соответствующей минимальной моды. Инверсия минимальной моды в процессе оптимизации позволяет свести задачу определения седловой точки к поиску локального минимума. Показано применение предложенного метода для поиска верхних и нижних лучей в модельной ионосфере. Также приведен подход к решению проблемы выборки начальных приближений для поиска различных решений. Этот подход основан на глобальной оптимизации лучевых траекторий, где каждое найденное решение используется для задания начального приближения в поиске новых лучей. Работа глобальной оптимизации продемонстрирована на примере трехмерной модельной ионосферы.

**В четвертой главе** представлены результаты численного моделирования радиотрасс с использованием вариационного подхода. Показаны результаты реализации метода обобщенной силы и глобальной оптимизации для различных аналитических моделей ионосферы, а также международной справочной модели IRI-2007. Рассмотрены особенности применения метода обобщенной силы в двумерной и трехмерной неоднородных средах. В частности, обсуждаются вопросы адаптации и применимости метода в средах, где присутствуют разрывы в производной функции плазменной частоты, а также рассматриваются примеры многолучевости в слоистой среде с учетом горизонтальных неоднородностей.

Представлено сравнение вариационного подхода с традиционным методом при-  
стрелки и показано практическое применение разработанного метода для синте-  
зирования дистанционно-частотных характеристик наклонного зондирования.

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в хо-  
де работы над диссертацией.

В **приложении** представлено подробное описание процедуры оптимиза-  
ции методом проецирования скорости.

# Глава 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАСПРОСТРАНЕНИИ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

## 1.1 Асимптотические подходы к описанию распространения радиоволн в ионосфере

Распространение электромагнитных волн в пространстве описываются материальными уравнениями Максвелла [1]. Однако при решении задач о распространении радиоволн в ионосферной плазме непосредственное решение уравнений Максвелла весьма затруднительно. Поэтому на практике для задач численного моделирования исследователи используют асимптотические приближения.

Так, короткие радиоволны в ионосфере с частотами 3 – 30 МГц часто представляются в виде плоских монохроматических волн, распространение которых описывается уравнением Гельмгольца. Если параметры среды мало меняются на масштабах порядка длины волны, то решение уравнения Гельмгольца можно представить в виде асимптотического ряда [2]. Разложение решения в ряд позволяет приближенно решить исходную волновую задачу. Важно понимать, что выбранный вид разложения определяет форму приближенного описания волновых полей и границы его применимости. Рассмотрим некоторые асимптотические подходы к решению задачи распространения коротких радиоволн в ионосфере.

Одним из известных подходов является применение канонического оператора Маслова для построения коротковолновых (высокочастотных) решений [3–5]. Теория канонического оператора Маслова в свое время ввело фундаментальное понятие «лагранжево многообразии» в фазовом пространстве, представляющее собой отображение решений в исходном конфигурационном пространстве. Метод канонического оператора позволяет получить параметры волны, в том числе в фокальных точках. В этом случае амплитуда поля волны является гладкой функцией на лагранжевом многообразии и не содержит сингулярности в окрестностях фокусов и каустик [6], что, несомненно, является важным преимуществом. В настоящее время метод оператора Маслова применяется в различных приложениях [7–9], в том числе при расчете радиоволн в ионосфере [10; 11].

Другим асимптотическим подходом является метод нормальных волн [12], суть которого заключается в разложении решения волнового уравнения в ряд по собственным функциям радиальной задачи. Такая постановка позволяет рассматривать задачу распространения радиоволн с учетом характеристик передающих и приемных антенн, а также параметров подстилающей поверхности. Созданная численная модель распространения радиоволн на основе метода нормальных волн активно применяется для расчета трасс средней и дальней протяженности, в том числе для описания кругосветного распространения [13; 14].

Наряду с оператором Маслова и методом нормальных волн в теории распространения радиоволн известны приближения Рытова [15] и Борна [16], позволяющие решать задачи в условиях, когда размеры неоднородностей могут быть меньше радиуса зоны Френеля [17]. Для описания дифракционных эффектов и многолучевости используется метод фазового экрана [18]. Также для распространения радиоволн в случайно неоднородной среде в условиях сильной и слабой вариации фазы применяется двойное взвешенное Фурье преобразование, позволяющее диагностировать неоднородности с размерами больше и меньше радиуса Френеля при отсутствии информации о положении неоднородностей [19; 20]. Существует цикл работ по разработке теории стохастических высокочастотных радиоканалов [21; 22] и моделировании эффектов сцинтилляции при трансионосферном распространении радиоволн [23; 24].

Несмотря на множество асимптотических подходов к решению волновой задачи, наиболее широко известным и используемым является приближение геометрической оптики (или лучевое приближение). Этот подход основан на разложении решения в лучевой ряд по малому параметру [25], в результате чего уравнение Гельмгольца сводится к уравнению эйконала и уравнениям переноса для амплитудных коэффициентов [2]. Решениями уравнения эйконала являются характеристики или лучевые траектории, семейство которых приближенно описывает распространение волны в заданном пространстве. Метод геометрической оптики широко применяется в различных областях физики: акустике [26—28], распространении волн цунами [29—31], сейсмологии [32—35], ультразвуковой томографии [36] и т.д. На его основе созданы многочисленные модели расчета волн в неоднородной среде. В радиофизике метод геометрической оптики используется в моделировании распространения радиоволн [37], прогнозировании радиосвязи [38; 39], синтезировании ионограмм вертикального и наклонного

зондирования [40; 41] и т.д. При этом, несмотря на широкое использование и развитие метода геометрической оптики, до настоящего времени существуют актуальные вопросы его применения и дальнейшего развития.

В рамках геометрической оптики лучевые траектории характеризуются наличием каустик – огибающей лучевых семейств [2]. В окрестности каустики происходит слияние лучей, якобиан расходимости обращается в ноль, следовательно, первый амплитудный коэффициент, определяющий энергию, стремится к бесконечности. Однако амплитуда поля волны не может принимать бесконечных значений, что свидетельствует о неприменимости приближения геометрической оптики в окрестности фокусов и каустик. Тем не менее, существуют различные подходы и модификации, позволяющие дополнить возможности геометрической оптики и рассчитать амплитуду в окрестности каустики. Например, метод гауссовых пучков, теория катастроф, канонический оператор Маслова.

Ранее упомянутый метод оператора Маслова является наиболее общим подходом к заданию равномерных асимптотик. В рамках теории канонического оператора каустические особенности представляются в виде проекций расширенного фазового пространства координат и импульсов, известного как лагранжево многообразие [3]. В расширенном пространстве фазовые траектории образуют трехмерную гиперповерхность, которая при отображении в координатное пространство образует складки – каустики. Асимптотика оператора Маслова позволяет получить амплитуду поля в виде гладкой функции, в том числе в окрестностях фокусов и каустик.

В рамках волновой теории катастроф также используются методы построения равномерных асимптотик, применяемых для описания волновых полей в окрестностях каустик [42]. Разработанная классификация асимптотических разложений позволяет рассмотреть различные типы основных, краевых и угловых катастроф, применяемых для расчета поля волны в областях каустик и каустической тени [43–45].

Теория гауссовых пучков основана на физическом представлении луча в виде лучевой трубки с ненулевым поперечным сечением [46]. Предполагая, что амплитуда поля в сечении трубки подчиняется гауссовому закону, можно определить параметры поля в некоторой заданной точке. На практике для получения параметров с высокой точностью используется метод суммирования гауссовых пучков. Численное моделирование в плавно неоднородных средах

показывает соответствие метода гауссовых пучков и других асимптотических подходов [47].

В результате, как упоминалось ранее, наиболее широко используемым приближением для описания распространения коротких волн в неоднородных средах является метод геометрической оптики, который, однако, имеет ограничения в использовании в областях каустик. Другие асимптотические приближения позволяют рассчитывать поле волны в областях каустик, но их использование нередко приводит к громоздким выкладкам и вычислительным трудностям. Поэтому на практике применяется комплексный подход [48], где, благодаря наглядности и относительной простоте реализации за основу берется метод геометрической оптики, позволяющий предварительно рассчитать лучевое семейство и при необходимости определить типы каустических структур и другие параметры. Далее в областях, где геометрическая оптика неприменима, используются другие асимптотические подходы (оператор Маслова, теория катастроф и др.). Представленный комплексный подход, где существующие асимптотические подходы используются вместе с методом геометрической оптики и дополняют друг друга, является перспективным. Далее рассмотрим подробнее историю создания и применения метода геометрической оптики в задачах распространения радиоволн в ионосфере.

## **1.2 Канонические уравнения Гамильтона. Задача Коши о расчете лучевых траекторий**

Традиционно под термином геометрическая оптика понимается представление изображений с помощью лучей. Однако с точки зрения асимптотических подходов к решению волнового уравнения метод геометрической оптики имеет более широкое значение, которое заключается в приближенном описании волновых полей. Рассмотрим основные положения метода геометрической оптики, опираясь на монографию [2], где вывод лучевых уравнений изложен наиболее последовательно.

Для начала запишем уравнение Гельмгольца для скалярного поля  $U(r)$ :

$$\Delta U + k_0^2 n^2 U = 0, \quad (1.1)$$

где  $n$  – показатель преломления среды,  $k_0 = \omega/c$  – волновое число,  $\omega$  – циклическая частота,  $c$  – скорость света. Решение уравнения Гельмгольца позволяет получить параметры комплексной амплитуды  $U(r)$ , которая полностью описывает монохроматическое поле, так как она объединяет амплитуду поля волны  $a(r)$  и эйконал  $\psi(r)$ , являющийся функцией, определяющей оптическую длину пути луча между двумя произвольными точками.

Будем считать решением уравнения Гельмгольца (1.1) выражение вида:

$$U(r) = a(r) e^{-ik_0\psi(r)}. \quad (1.2)$$

Существуют различные способы вывода уравнений геометрической оптики. Однако их объединяет метод разложения решения (1.2). В нашем случае выберем дебаевское разложение в ряд по обратным степеням размерного параметра волнового числа  $k_0$ :

$$U(r) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m / (ik_0)^m. \quad (1.3)$$

Подставляя выражение (1.3) в уравнение Гельмгольца (1.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем уравнение эйконала и переноса для величин  $A_m$ :

$$\nabla\psi = n, \quad (1.4)$$

$$2(\nabla A_0 \nabla\psi) + \nabla A_0 \nabla\psi = 0, \quad (1.5)$$

$$2(\nabla A_1 \nabla\psi) + \nabla A_1 \nabla\psi = -\nabla A_0, \quad (1.6)$$

.....

$$2(\nabla A_m \nabla\psi) + \nabla A_m \nabla\psi = -\nabla A_{m-1}. \quad (1.7)$$

Решения уравнений (1.4 – 1.5) описывают поле волны в приближении геометрической оптики. Неоднородные дифференциальные уравнения с частными



производными первого порядка относятся к классу уравнений Гамильтона-Якоби. Запишем в общем случае уравнения Гамильтона-Якоби:

$$H \left( \frac{\partial \psi}{\partial q_1}, \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial q_n}; q_1, q_2, \dots, q_n \right) = 0, \quad (1.8)$$

или

$$H(p_i, q_i) = 0, \quad p_i = \frac{\partial \psi}{\partial q_i},$$

где  $\psi = \psi(q_1, q_2, \dots, q_n)$  – искомая функция эйконала,  $q_i$  – произвольные координаты, а  $p_i$  – сопряженные им импульсы. Методом характеристик решение уравнений (1.8) сводится к интегрированию соответствующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_i}{\partial H / \partial p_i} = -\frac{dp_i}{\partial H / \partial q_i} = -\frac{d\psi}{\sum_1^n p_i (\partial H / \partial p_i)}, \quad (1.9)$$

Уравнения характеристик часто записывают в следующей форме:

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.10)$$

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1.11)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \sum_1^n p_i \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right), \quad (1.12)$$

где  $\tau$  – вспомогательная независимая переменная.

Уравнения характеристик (1.10 – 1.12) представлены в канонической форме и были предложены Гамильтоном первоначально для описания распространения света. Под величинами  $q_i$  и  $p_i$  обычно понимают обобщенные координаты и импульсы, а  $H(p_i, q_i)$  – гамильтониан системы.

В геометрической оптике лучом принято называть пространственную проекцию  $q_i = q_i(\tau)$ , являющейся характеристикой уравнения эйконала (1.4). Характеристику в фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  для краткости также иногда называют лучем, а уравнения характеристик именуют при этом уравнениями эйконала или лучевыми уравнениями [2]. Учитывая, что сам эйконал  $\psi$  является характеристикой уравнения Гельмгольца, характеристики уравнения эйконала называют часто бихарактеристическими. Впервые бихарактеристическая систе-

ма уравнений для построения лучевых траекторий в неоднородной среде, в том числе для расходимости лучевых потоков, была получена в работах [37; 49]. На практике используется запись бихарактеристической системы уравнений в сферической системе координат в следующем виде [50]:

$$\begin{cases} dr/d\tau = p_r, \\ d\theta/d\tau = (1/r) p_\theta, \\ d\varphi/d\tau = p_\varphi/(r \sin \theta), \\ dp_r/d\tau = n (dn/dr) + (1/r) p_\theta^2 + (1/r) p_\varphi^2, \\ dp_\theta/d\tau = 1/r \left[ n (\partial n/\partial \theta) - p_r p_\theta + \operatorname{ctg} \theta \cdot p_\varphi^2 \right], \\ dp_\varphi/d\tau = 1/(r \sin \theta) \left[ n (\partial n/\partial \varphi) - \sin \theta \cdot p_r p_\theta - \cos \theta \cdot p_\theta p_\varphi \right], \end{cases} \quad (1.13)$$

где  $r, \theta, \varphi$  – сферические координаты,  $n$  – показатель преломления среды,  $p_r = \partial\psi/\partial r, p_\theta = \partial\psi/(r\partial\theta), p_\varphi = \partial\psi/(r \sin \theta \cdot \partial\varphi)$  – компоненты вектора импульса  $p$ , которые связаны выражением:

$$p_r^2 + p_\theta^2 + p_\varphi^2 = n^2. \quad (1.14)$$

Для того чтобы решить характеристические уравнения (1.13) необходимо дополнить систему начальными условиями для радиус-вектора  $r$  (положение источника сигнала) и импульсов  $p$  (углы излучения). На практике построение решения выполняется на основе численных схем. Численное интегрирование системы уравнений (1.13), как правило, осуществляется методом Рунге-Кутты [50]. Решение заданной системы в заданном диапазоне углов излучения описывает семейство лучевых траекторий. Далее рассмотрим характерные примеры расчета лучевых семейств в задаче о распространении коротких радиоволн в ионосфере Земли.

В случае ионосферы, характеризующейся наличием ионизированных слоев, семейство лучевых траекторий радиоволны может иметь сложную структуру. Пример расчета семейства лучевых траекторий в однослойной ионосфере представлен на рис. 1.1. Максимум плазменной частоты располагается на высоте 300 км со значением критической частоты  $f_{cr} = 9$  МГц. Для примера была выбрана рабочая частота  $f = 14$  МГц. Рабочая частота находится в ча-

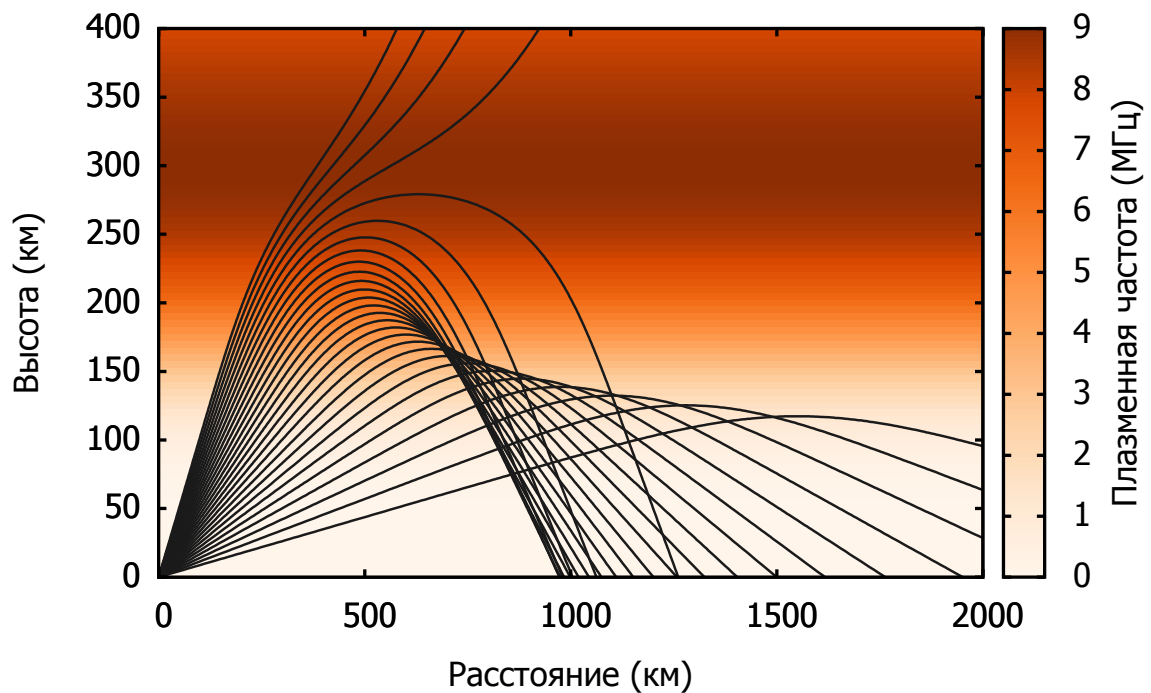


Рисунок 1.1 — Иллюстрация лучевых траекторий радиоволны, полученных решением уравнения эйконала методом бихарактеристик в однослойной модели ионосферы. Диапазон начальных углов излучения составляет  $5^\circ - 46^\circ$  с шагом  $1.5^\circ$ . Рабочая частота 14 МГц.

стотном диапазоне между критической частотой и максимально применимой (МПЧ):  $f_{cr} < f < \text{МПЧ}$ . Диапазон начальных углов излучения составляет от  $5^\circ - 46^\circ$  с шагом  $1.5^\circ$ . Как видно на рис. 1.1 ионосферный слой  $F2$  оказывает значительное влияние на распространение радиоволны. Большая часть лучей преломляется и отражается от ионосферного слоя, а часть решений проходит насквозь ионосферу. Кроме того, данный пример характеризуется наличием простой каустики. Значительно сложнее выглядит картина лучевого семейства в случае двухслойной среды, как это показано на рис. 1.2. Наличие ионосферного слоя  $E$  приводит к появлению дополнительных отраженных лучей, меняется граница мертвой зоны и возникает дополнительная каустическая особенность. Однако, представленные примеры расчетов выполнены для простой плоскослойной изотропной среды. В случае трехмерного распространения в неоднородной анизотропной ионосфере лучевое семейство может иметь очень сложную структуру. Тем не менее выделяют несколько основных типов лучей: верхние, нижние, трансionoсферные, многоскачковые и волноводные лучи. Рассмотрим виды ионосферных лучей подробнее.

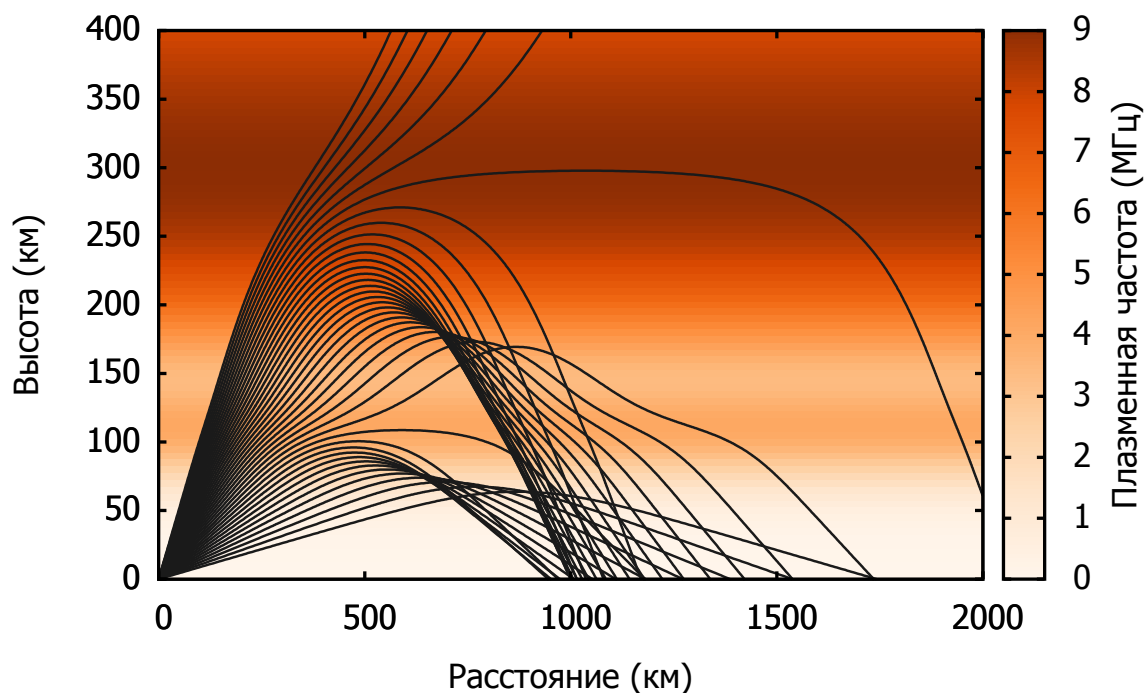


Рисунок 1.2 — Иллюстрация лучевых траекторий радиоволны, полученных решением уравнения эйконала методом характеристик в двухслоевой модели ионосферы. Диапазон начальных углов излучения составляет  $5^\circ - 46^\circ$  с шагом  $1^\circ$ . Рабочая частота 14 МГц.

Верхние лучи, или лучи Педерсена, характеризуются прямой зависимостью дальности точки приема от угла места излучения (см. рис. 1.1 и 1.2) [51]. Для верхних лучей характерна «пространственно-разнесённая» точка отражения и специфическая вытянутая форма, характеризующая распространение вдоль максимума ионосферного слоя. Данный тип лучей существует только на рабочих частотах, соответствующих диапазону между критической частотой слоя и МПЧ:  $f_{cr} < f < \text{МПЧ}$ . Они не образуют пересечений с соседними лучами, и как следствие, не образуют каустик. Верхние лучи обладают большой расходимостью, что приводит к слабому уровню сигнала в точке приема, и как результат, чаще всего на практике радиосвязь на верхних лучах мало используется.

Нижние лучи характеризуются обратной зависимостью дальности распространения от начальных углов места (см. рис. 1.1 и 1.2) [51]. Нижние лучи излучаются под меньшими углами к горизонту, чем соответствующему этому слою верхние лучи. Точка отражения нижних лучей не разнесена в пространстве, напоминая зеркальное отражение светового луча, и находится ниже максимума ионосферного слоя. В зависимости от геометрии задачи нижние лучи могут на-

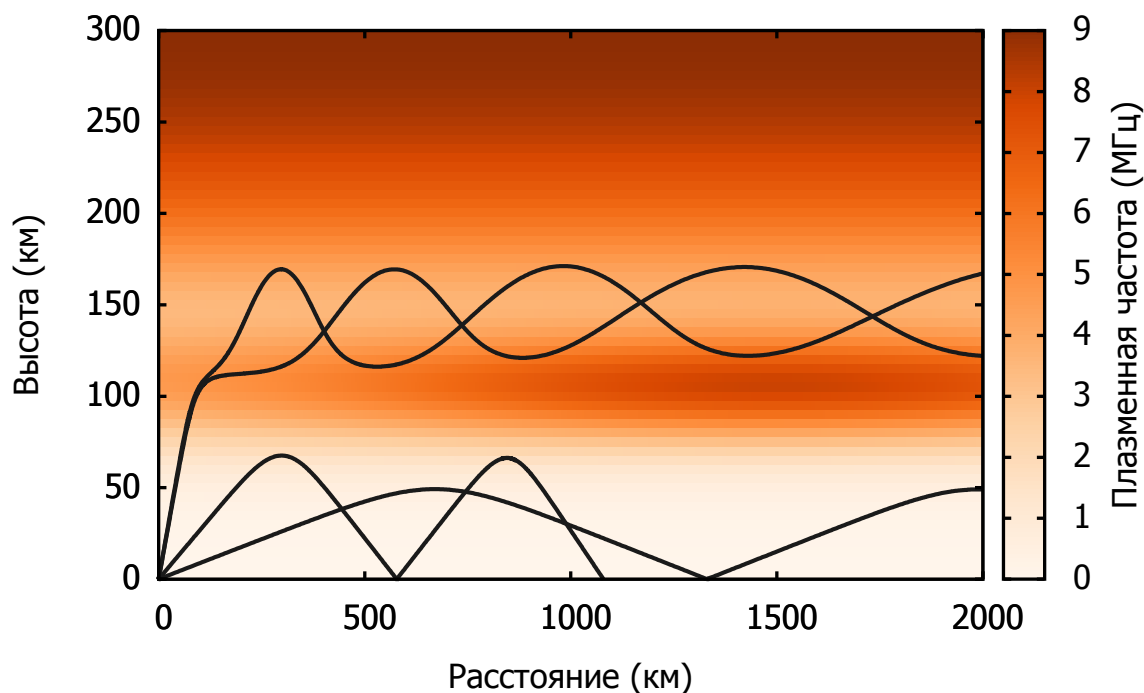


Рисунок 1.3 — Примеры двухскачковых и волноводных лучевых траекторий в модельной ионосфере. Рабочая частота 6 МГц.

блюдаться во всем диапазоне частот коротких волн до МПЧ трассы. Нижние лучи образуют фокусы и каустические структуры и имеют небольшую расходимость по сравнению с верхними лучами, а следовательно лучшими условиями для приема, что обуславливает их применение для радиосвязи.

Трансионосферные лучи – радиолучи, проходящие ионосферу насквозь в открытое космическое пространство. Данный тип лучей наблюдается на частотах выше критической частоты ионосферы  $f > f_{cr}$  (что, как правило, соответствует частотам, выше критической частоты максимума слоя  $F2$ ). Обычно трансионосферные лучи излучаются под углами близкими к  $90^\circ$  к горизонту (см. рис. 1.1 и 1.2). Эти лучи могут значительно преломляться в ионосфере вблизи критической частоты ионосферного максимума и, в зависимости от условий распространения в области значительных горизонтальных градиентов, могут образовывать каустики.

Другим типом радиолучей являются многоскачковые лучи. Как показано на рис. 1.3, такие траектории образуются в результате последовательного отражения от ионосферы и поверхности Земли. Как правило, многоскачковые лучи представляют собой комбинацию верхних и нижних лучей. На практике двухскачковые и трехскачковые трассы, отраженные от ионосферного  $E$  слоя, испытывают незначительное поглощение, в результате чего используются для

радиосвязи и регистрируются на ионограммах наклонного зондирования. На ионограммах вертикального зондирования также довольно часто наблюдаются следы от многократных радиоотражений между Землей и ионосферой.

Волноводные лучи – радиолучи распространяющиеся в ионосферном волноводном канале (см. рис. 1.3) в результате многократных отражений между ионосферными слоями (или неоднородностями). Такие лучи испытывают значительное отклоняющее поглощение и имеют большую расходимость, образуют каустики и могут распространяться на большие расстояния.

Вышеупомянутые типы лучей описывают основную часть решений лучевых уравнений. Однако существуют и другие «экзотические» лучевые траектории, например, лучи, закручивающиеся в петли, представленные в работе [52]. С точки зрения численного моделирования такие траектории получаются достаточно редко и в данном исследовании не рассматриваются.

Отметим, что представленные лучевые траектории не имеют различий с точки зрения решения лучевых уравнений и, первоначально, данная классификация является условной. Однако, как будет показано позднее, с точки зрения вариационного принципа Ферма, фазовый путь лучевых траекторий различного типа соответствует различным точкам экстремума, что важно при решении вариационной задачи.

### **1.3 Приближение геометрической оптики в задаче распространения радиоволн. Обзор методов и моделей**

Теория распространения радиоволн, основанная на решении уравнении эйконала, последовательно развивалась с 1950-х – 1960-х гг. Так в работах Дж. Хазельгров (J. Haselgrove) были предложены подходы и алгоритмы расчета гамильтоновой системы уравнений для трехмерной анизотропной плазмы с учетом сферичности Земли [53–55]. Позднее в работах [37; 49] был развит метод бихарактеристик, позволяющий рассчитывать лучевые траектории, амплитуду поля волны, расходимость и другие параметры с большой точностью. Бихарактеристическая система уравнений, предложенная Д.С. Лукиным, широко применяется для исследования распространения коротких радиоволн в модельной

ионосфере. На примере различных сред метод бихарактеристик позволяет исследовать особенности формирования лучевых структур и каустик в слоистой ионосфере, в том числе с учетом ионосферных неоднородностей [42; 56; 57].

На основе предложенных методов было реализовано множество моделей расчета радиотрасс в приближении геометрической оптики [40; 52; 58–65]. Несмотря на проблемы, возникающие в основном из-за сложности среды распространения, расчет ионосферных лучей, испускаемых в заданном направлении, в значительной степени стал обычной численной проблемой, для которой доступны многие программные пакеты [58; 61; 64; 66]. В частности, на основе метода бихарактеристик в Балтийском Федеральном университете (БФУ) создана численная модель расчета радиотрасс в трехмерной анизотропной среде [67], где параметры плазмы задаются опционально в зависимости от выбранной ионосферной модели. Дальнейшее развитие этой численной модели представлено в работах [68; 69], где в качестве среды для распространения радиоволн используется глобальная самосогласованная модель термосферы, ионосферы и протоносферы (ГСМ ТИП), разработанная в Калининградском филиале Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн (КФ ИЗМИРАН) [70; 71]. Использование теоретической модели ГСМ ТИП, в основе которой лежит численное решение гидродинамических уравнений для ионосферной плазмы с учетом продольных токов, электрических полей и других химических и физических процессов в сферической системе координат, открыла новые возможности в исследовании распространения коротких радиоволн в условиях геомагнитных бурь [72; 73]. Также было исследовано влияние внезапных стратосферных потеплений на распространение радиоволн [39]. Последняя модификация этой численной модели распространения радиоволн позволяет рассчитывать параметры амплитуды, расходимости и поляризации радиоволны [74].

Расчет радиотрасс методом геометрической оптики применяется в неоднородных средах, полученных по данным радиотомографии [75]. Для решения краевой задачи использование симплексного метода Нельдера-Мида позволило усовершенствовать метод пристрелки и получить эффективный инструмент моделирования ионограмм наклонного зондирования [76]. В настоящее время лучевое приближение является основным средством моделирования ионограмм и исследования перемещающихся ионосферных возмущений, которое используется в многочисленных исследованиях [40; 63; 77; 78].

Следует отметить, что все указанные выше модели построены на решении задачи Коши о расчете радиолучей с изначально заданными углами излучения. Решение такого класса задач позволяет быстро определять поле волны и основные характеристики распространения радиоволн при заданной диаграмме направленности передающей антенны. Последовательный расчет радиолучей с изменяющимися углами излучения при заданном шаге изменения угла (трассировка радиолучей) позволяет получать волновые фронты и находить фокальные точки, каустические кривые и поверхности. Другой важной проблемой является двухточечная задача о расчете радиотрасс с зафиксированными положениями передатчика и приемника. О решении подобного рода задач пойдет речь в следующем параграфе.

#### 1.4 Граничная задача о расчете радиолучей

Во многих важных прикладных задачах направление угла излучения заранее неизвестно, и вместо этого указывается положение приемника. Так возникает проблема расчета ионосферных радиотрасс от точки передачи радиосигналов к точке их приема, иными словами формулируется краевая задача, где необходимо найти соответствующие радиолучи между фиксированными положениями передатчика и приемника. Решение краевой задачи значительно отличается от решения задачи Коши. На практике при расчете распространения радиоволн в неоднородной ионосфере решение такого класса задач можно получить только с использованием численных методов. В литературе принята следующая классификация численных подходов для решения краевой задачи [79]:

1. Итерационный подход, примерами использования которого являются:
  - метод пристрелки (стрельбы);
  - конечно-разностные методы;
  - метод интегральных уравнений.
2. Неитерационный подход, включающий следующие методы:
  - метод суперпозиции;
  - метод прогонки;
  - метод сопряженного оператора;



- метод преобразования;
- метод дифференцирования по параметру;
- метод инвариантного погружения.

Для численного решения краевых задач в распространении радиоволн и других областях, где применимо приближение геометрической оптики, обычно применяют разностный метод и метод пристрелки (стрельбы). В разностном методе задача приближенно заменяется решением алгебраической системы уравнений с большим числом неизвестных (неизвестными считаются значения решения в узлах сетки) [80]. В случае нелинейных задач метод является итерационным [81]. Однако, чаще всего на практике применяется метод пристрелки о котором пойдет речь в следующем подпараграфе.

#### 1.4.1 Метод пристрелки

Наиболее распространенным подходом к решению краевой задачи является численное решение гамильтоновой системы уравнений для лучей в сочетании с методом пристрелки (представляющий собой совокупность методов трассировки и дальнейшей пристрелки), где направление запуска систематически уточняется до тех пор, пока луч не попадет в указанную точку приема с заданной точностью (см. рис. 1.4) [81].

Простейшим примером метода пристрелки является метод дихотомии. Выполнив предварительную трассировку лучей, определяются пары значений начальных углов излучения («вилки»), образующих диапазон значений углов, содержащих условие для предполагаемого решения [81]. Далее осуществляется последовательное уточнение найденной вилки, делением отрезка в области точки приема пополам до тех пор, пока точка приземления луча не окажется в некоторой заданной окрестности точки приема (см. рис. 1.4). Однако нахождение каждого нового диапазона углов требует многократного решения системы характеристических уравнений (см. формулу (1.13)), что чрезвычайно трудоемко и требует значительных временных и вычислительных затрат. Поэтому актуален выбор более быстрых методов, чем дихотомия.

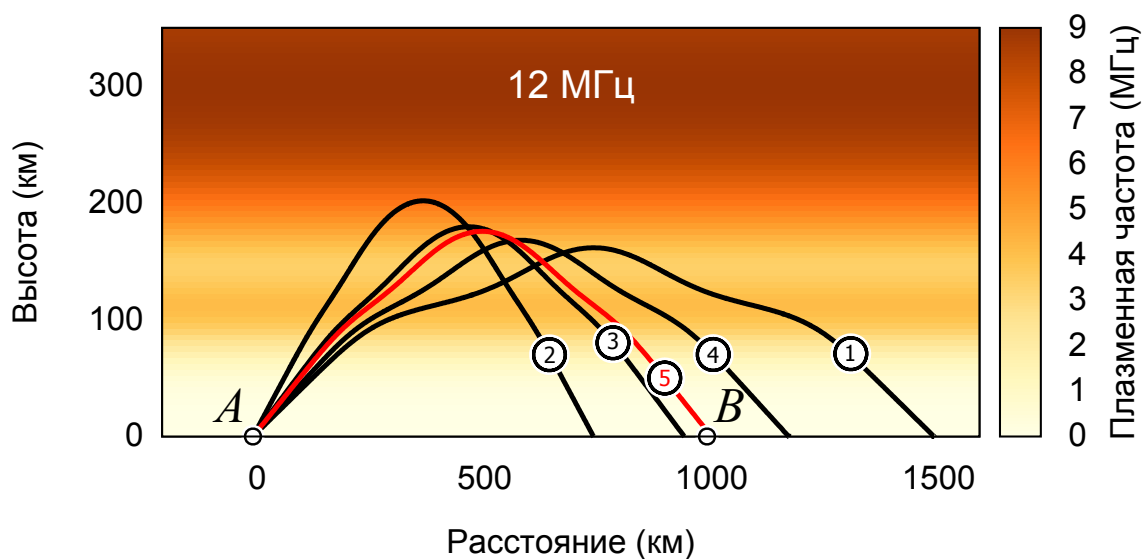


Рисунок 1.4 — Иллюстрация метода пристрелки в двухслойной ионосфере. Рабочая частота 12 МГц. Черными линиями представлены лучи, полученные методом пристрелки. Красной линией показано найденное решение.

Одним из таких подходов является использование симплексного алгоритма Нелдера-Мида [76; 82], в котором поиск решений граничной задачи осуществляется путем минимизации ошибки приземления относительно начального угла излучения. Аналогично методу дихотомии, на начальном этапе проводится предварительная трассировка, на основе чего формируется треугольник (в двумерном случае – отрезок) внутри которого расположена точка приема. Далее применяется алгоритм Нелдера-Мида для последовательного уточнения вершин треугольника. В результате последовательного уменьшения ошибки приземления, вершины треугольника сжимаются до тех пор, пока не будет достигнут приемлемый уровень точности [83].

Однако, практика показывает, что метод пристрелки наиболее эффективен в двумерных гладких средах без неоднородностей, с большим градиентом плазменной частоты (например, в двумерной изотропной среде, где электронная концентрация задается моделью IRI [84], сглаженной интерполяционным сплайном [63]). В трехмерных задачах с учетом анизотропии и при наличии ярко выраженных горизонтальных и вертикальных неоднородностей, пристрелка осуществляется для двух угловых переменных (азимут и угол места), что неизбежно ведет к существенному увеличению вычислительных затрат. Как резуль-

тат, последовательная пристрелка по азимуту и углу места в условиях сильных неоднородностей оказывается неустойчивой [85].

Другая проблема связана с многолучевостью ионосферного распространения радиоволн. Например, в случае, когда рабочая частота  $f$  лежит в диапазоне от критической частоты  $f_{cr}$  до максимально применимой частоты (МПЧ) ионосферных слоев, могут возникать множественные односкачковые лучевые траектории, представленные верхними, нижними и волноводными лучами, а также многоскачковые радиолучи [83; 86]. При этом каждый луч вносит свой вклад в радиосвязь между передатчиком и приемником. На практике многолучевое распространение исследуется путем предварительного сканирования по углу места и азимуту на участке радиотрассы, чтобы изолировать искомые направления запуска и предоставить информацию для метода пристрелки. Кроме того, для успешной стрельбы в условиях многолучевости нужно позаботиться о том, чтобы шаг предварительной трассировки в заданном диапазоне углов излучения был оптимальным. В противном случае это может привести к пропуску решений, удовлетворяющих граничному условию, и значительному увеличению вычислительных затрат. Выделим следующие проблемы метода пристрелки:

- невозможность точного попадания решения в заданную точку приемника в неоднородных средах;
- неустойчивость в определении близко лежащих лучей и проблемы сходимости метода пристрелки при наличии двух решений между лучевыми траекториями с близкими угловыми характеристиками;
- зависимость количества найденных решений от углового шага трассировки;
- большие вычислительные затраты при решении краевой задачи в трехмерной неоднородной анизотропной среде.

Несмотря на вышесказанное численные модели расчета радиотрасс, основанные на решении уравнения эйконала, широко и достаточно успешно используются для моделирования ионограмм наклонного и вертикального зондирования, а также для определения оптимальных характеристик для радиосвязи между наземными и воздушными объектами.

### 1.4.2 Вариационный подход

Решить граничную задачу можно и другим способом. Учитывая, что приближение геометрической оптики базируется на принципе Ферма о стационарности фазового (оптического) пути, расчет лучей можно свести к решению вариационной задачи о расчете оптимальных траекторий.

Для начала установим связь между методом характеристик и основными вариационными понятиями [87]. Как известно, теория уравнений Гамильтона тесно связана с классическим вариационным исчислением: решение уравнений Гамильтона эквивалентно нахождению функций, которые отвечают экстремальным значениям функционала, т.е. обращают в нуль его первую вариацию. В механике это соответствует принципу Гамильтона (принципу наименьшего действия), а в геометрической оптике – принципу Ферма. В случае, когда гамильтониан задается выражениями (1.8), принцип Ферма утверждает [2], что функционал:

$$\psi(a,b) = S = \int_{r_a}^{r_b} n^2(\vec{r}) d\tau = \int_{r_a}^{r_b} n(\vec{r}) dl, \quad (1.15)$$

заданный на виртуальных лучах, соединяющих точки  $r_a$  и  $r_b$  стационарен на траекториях, удовлетворяющих уравнениям ((1.4) – (1.5)). Условие стационарности можно записать в виде равенства нулю первой вариации эйконала [88]:

$$\delta\psi(a,b) = \delta S = 0, \quad (1.16)$$

Уравнения лучей выступают как уравнения Эйлера для экстремалей функционала, являющихся геодезическими в неевклидовом пространстве с метрикой  $ds^2 = n^2(x,y,z) \times (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ . В рассматриваемом подходе принцип Ферма является следствием уравнения эйконала, поэтому лучевые характеристики являются экстремальными функционала Ферма. В обобщенном виде функционал луча принимает вид:

$$S = \int_{r_a}^{r_b} L(q(t), \dot{q}(t), t) dl, \quad (1.17)$$

где  $r_A, r_B$  – граничные условия;  $L(q(t), \dot{q}(t), t)$  – лагранжиан системы,  $q$  – обобщённые координаты. Тогда принцип наименьшего действия запишется в виде:

$$\delta S = \delta \int_{r_a}^{r_b} L(q(t), \dot{q}(t), t) dl = 0, \quad (1.18)$$

Этот принцип Гамильтон заложил в основу своей «гамильтоновой механики» и дал решение вариационной задачи в виде «канонических уравнений». Поэтому уравнения эйконала и канонические уравнения являются следствием принципа Ферма. Также можно получить уравнения Гамильтона непосредственно из принципа Ферма [89; 90]. Вывод канонических уравнений Гамильтона непосредственно из принципа Ферма демонстрируют справедливость методов вариационного исчисления для расчета лучевых траекторий радиоволны. Исходный функционал Ферма имеет размерность оптической длины пути луча, экстремальные значения которого необходимо определить. В результате решения вариационной задачи определяется лучевая траектория, соответствующая стационарным точкам заданного функционала. Причем найденный луч автоматически является решением системы лучевых уравнений. Стоит выделить важный аспект вариационной трактовки задачи о расчете радиолучей. Вариационная задача изначально формулируется как краевая задача, где положения точки излучения и приема сигнала зафиксированы. Это выгодно с практической точки зрения, когда необходимо рассчитать радиотрассу между двумя пунктами, положение которых задано.

Исторически, вариационный подход для решения краевой задачи активно применялся в сейсмологии. В 1970-х и 1980-х гг. были опубликованы фундаментальные работы о применении принципа Ферма к расчету лучевых траекторий продольных и поперечных сейсмических волн в земной коре. Предложенные методы «изгибания» [91] и «псевдоизгибания» [32], а также их многочисленные модификации [29; 92; 93] заложили основу многих сейсмологических моделей, которые широко используются и в настоящее время [94; 95].

В теории распространения радиоволн также были предложены различные формулировки и подходы к решению вариационной задачи. Ян Смилауэр (J. Šmilauer) в работе [96] предложил метод, в котором система обыкновенных дифференциальных уравнений получается из вариационного принципа, после чего эти уравнения решаются методом Галеркина. Известны работы, где пред-

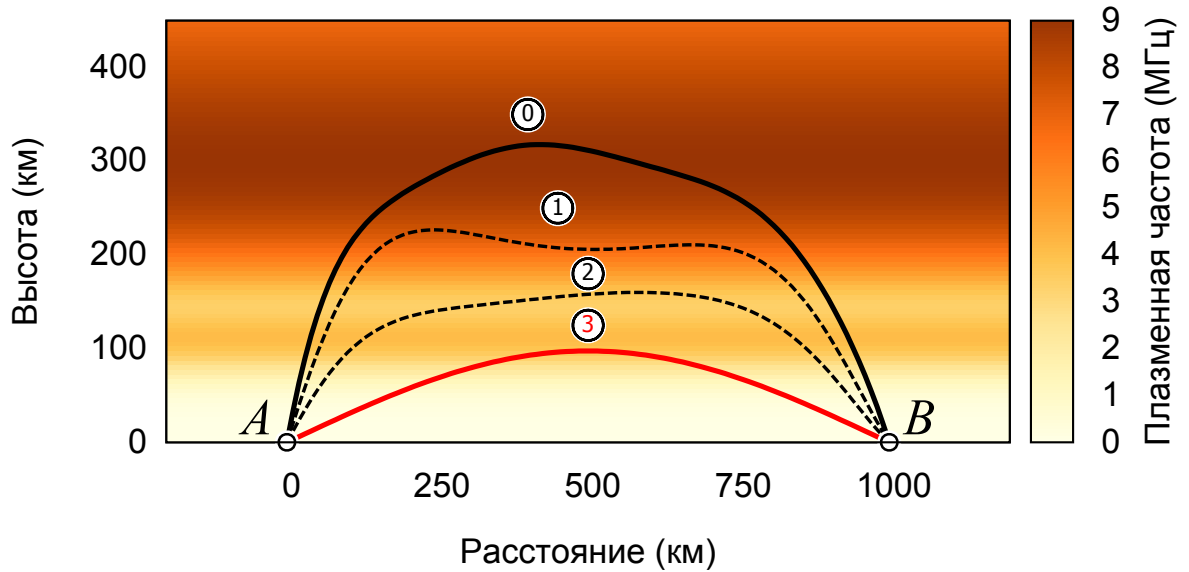


Рисунок 1.5 — Иллюстрация итерационного поиска луча вариационным методом. Черной линией представлено начальное приближение; пунктирными линиями – промежуточные положения траектории в процессе оптимизации; красной линией – искомое решение.

ложены методы минимизации для поиска радиолучей [97; 98]. В работе [99] представлен подход, основанный на численном решении вариационного уравнения Эйлера-Лагранжа для двумерной анизотропной ионосферы. Вариант вариационного решения двуточечной задачи также представлен в диссертации Б. А. Балаганского [100].

Наиболее последовательно вариационный подход, основанный на принципе Ферма, был рассмотрен К. Коулманом (С. Coleman) в работе [101]. Опираясь на опыт применения вариационного метода для расчета лучей сейсмических волн в земной коре [32], был предложен вариант прямой минимизации функционала (1.15). Данный подход напрямую использует вариационный принцип Ферма и включает в себя итерационное преобразование некоторой первоначально заданной траектории в оптимальную конфигурацию, которая удовлетворяет принципу стационарности (см. рис. 1.5). Рассматривая вариационное уравнение (см. формулу (1.16)), луч представляется в виде кусочно-линейной кривой, где положение  $N$  опорных точек задается в виде многомерного вектора  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ . Следовательно, функционал Ферма также является многомерной функцией параметров  $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ . К. Коулман показал, что лучевая траектория, удовлетворяющая принципу стационарности (1.16), может

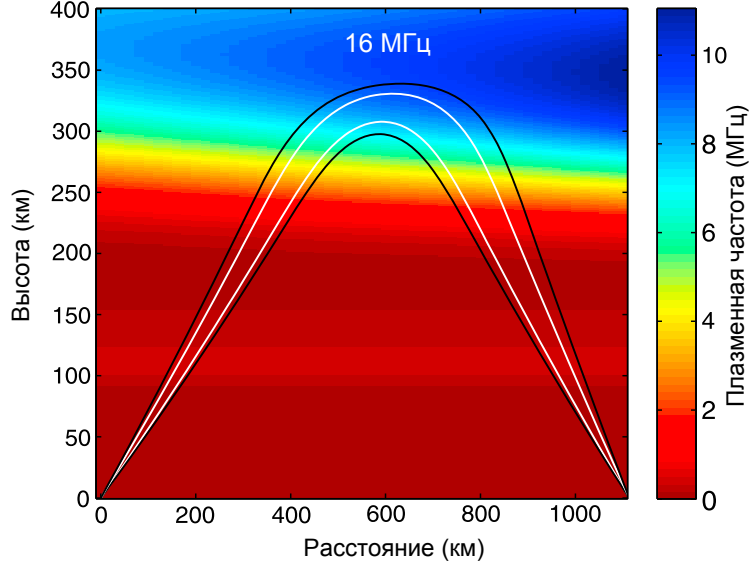


Рисунок 1.6 — Пример расчета лучевых траекторий радиоволны с частотой 16 МГц вариационным методом К. Коулмана [101]. Белые и черные линии представляют собой лучевые траектории обыкновенной и необыкновенной волны соответственно.

быть найдена, решая систему уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.19)$$

Применяя метод Ньютона-Раффсона для уравнения (1.19) с некоторым начальным приближением  $\boldsymbol{\alpha}^0$ , получим выражение:

$$\frac{\partial S^I}{\partial \alpha_i} + \sum_{j=1}^N (\alpha_j^{I+1} - \alpha_j^I) \frac{\partial^2 S^I}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.20)$$

где  $I$  – индекс текущей итерации. Выражение (1.20) представляет собой систему линейных уравнений по компонентам вектора  $\boldsymbol{\alpha}$ .

Матрица данной линейной системы является симметричной, следовательно, решение может быть получено прямой минимизацией, например, методом сопряженных градиентов [101]. Рассматривая только пути с фиксированными конечными точками передатчика и приемника, граничные условия выполняются автоматически, что является преимуществом метода. Однако вариационный подход, основанный на прямой минимизации функционала, позволяет успешно определять только верхние и транссионосферные лучи. Данная проблема обу-

словлена различным характером экстремумов, которые необходимо идентифицировать. В то время как верхние ионосферные лучи соответствуют минимумам функционала оптического пути и, следовательно, могут быть найдены простой минимизацией, нижние лучи не удовлетворяют условиям Лежандра на минимум [102; 103]. К. Коулман предположил, что причина этого кроется в наличии фокальных точек вследствие пересечений нижних лучей. Под фокальными точками в данном случае понимаются каустические особенности, образованные в результате слияния нижних лучей. В результате такие лучи не удовлетворяют условию Якоби на локальный минимум, в соответствии с которым луч не должен содержать фокальных точек (не выполняется условие Лежандра на локальный минимум) и, следовательно, такие лучи не могут быть найдены прямой минимизацией.

Поэтому для поиска нижних лучей К. Коулман непосредственно решает вариационное уравнение (1.19). Для этого успешно применяется численный подход на основе метода Ньютона-Рафсона, который, однако, требует точного начального приближения. В работе [101], как для прямой минимизации верхних лучей, так и для определения нижних лучей методом Ньютона-Рафсона, в качестве начального приближения использовалось первичное представление луча в виде параболы. Такая первоначальная оценка луча, однако, не всегда является удачной, особенно для сильно возмущенной ионосферы, где лучевые траектории могут быть сильно искривлены. Многолучевое распространение создает дополнительную проблему, поскольку необходимо организовать подбор начальных приближений, чтобы позволить итерационной процедуре сходиться в различных экстремумах. Для решения проблемы начального приближения и многолучевости К. Коулман предложил использовать предварительную трассировку [83], которая позволяет из рассчитанного семейства лучей выбирать наиболее подходящее начальное приближение. Однако и в этом случае не существует универсального правила выборки начального приближения, к тому же такой подход неизбежно приводит к дополнительным вычислительным затратам.

Тем не менее результаты сходимости вариационным методом показали высокую скорость расчета (сходимость за не более чем 5 итераций), полное согласие с решениями по методу пристрелки и эффективность в определении верхних лучей [101]. Пример численных расчетов вариационным методом К. Коулмана



представлен на рис. 1.5. Несмотря на преимущества, вариационный метод пока не получил широкого применения в теории распространения радиоволн. Для дальнейшего развития вариационного подхода актуальными задачами являются: решение проблемы подбора начальных приближений и создание единого подхода к поиску всех типов лучевых траекторий.

## Глава 2. ПРЯМОЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЛУЧЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ

В данной главе речь пойдет о новом варианте прямого вариационного метода для решения граничной задачи о расчете лучевых траекторий распространения радиоволн в ионосфере. В основе предложенного подхода лежит опыт применения оптимизационных методов в распространении радиоволн [101], химии [104], сейсмологии [32]. Показано успешное применение вариационного метода в модельной ионосфере для решений, соответствующих минимумам функционала фазового пути. Обсуждаются проблемы определения нижних лучей и возможные пути их решения.

### 2.1 Прямой вариационный метод для расчета радиолучей. Постановка задачи

Вариационный подход к расчету лучевых траекторий радиоволны основан на фундаментальном принципе Ферма о стационарности фазового (оптического) пути. Для начала запишем выражение для функционала фазового пути луча в изотропной среде:

$$S[\gamma] = \int_A^B n(\vec{r}) dl. \quad (2.1)$$

Здесь интегрирование производится вдоль кривой  $\gamma$ , задающей траекторию луча, которая соединяет точки  $A$  и  $B$ , определяющие местоположения передатчика и приемника радиоволн,  $n(\vec{r})$  — показатель преломления в точке  $\vec{r} = (x, y, z)$ , лежащей на кривой  $\gamma$ , и  $dl$  — элемент длины вдоль  $\gamma$ .

Для функционала (2.1) запишем принцип Ферма как требование стационарности фазового пути радиолуча:

$$\delta S[\gamma] = \delta \int_A^B n(\vec{r}) dl = 0. \quad (2.2)$$

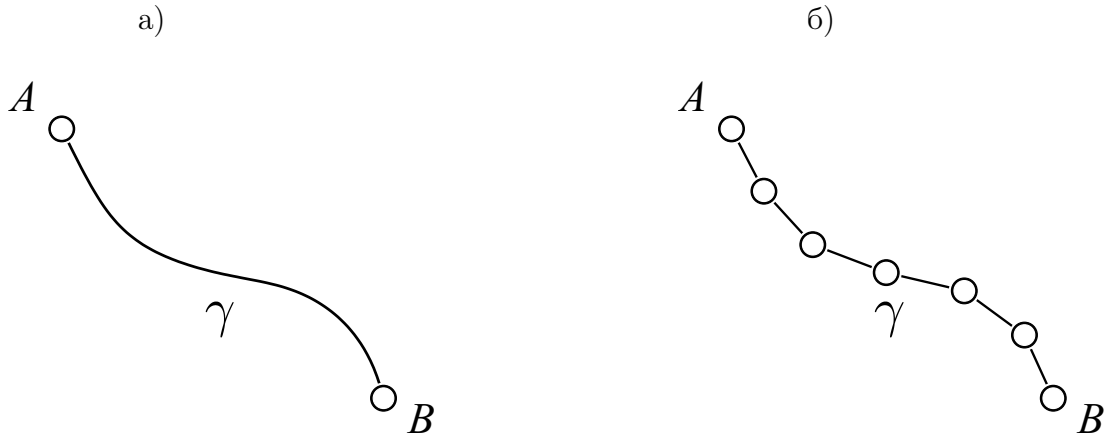


Рисунок 2.1 — Иллюстрация кривой  $\gamma$ , соединяющей граничные точки  $A$  и  $B$ , в непрерывном (а) и кусочно-линейном представлении луча (б).

Варьируя функционал  $S[\gamma]$ , можно получить дифференциальные уравнения Эйлера-Лагранжа, описывающие траекторию радиолуча. Далее задача сводится к решению этих уравнений, дополненных граничными условиями. Стандартным методом здесь является метод пристрелки (стрельбы), об ограничениях которого было сказано выше.

Лучевую траекторию можно получить и другим способом. Представим непрерывную кривую  $\gamma$  в виде ломаной, соединяющей  $N$  точек в пространстве. Дискретным представлением  $\gamma$  является упорядоченный набор этих точек  $\gamma = [\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1}]$ , первая и последняя из которых закреплены и совпадают с положением передатчика  $A$  и приёмника  $B$ . Такая параметризация не налагает никаких ограничений на кривую  $\gamma$ , в отличие от подхода, изложенного в статье [101], где вертикальная координата точки вдоль траектории радиотрассы предполагалась однозначной функцией горизонтальной координаты. В результате функционал  $S[\gamma]$  становится многомерной функцией векторов  $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1}$ , где  $\vec{r}_0 = \vec{r}_A$ ,  $\vec{r}_{N-1} = \vec{r}_B$ . Применяя к интегралу (2.1) метод трапеций, имеем

$$S[\gamma] \approx S(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (n_{i+1} + n_i) |\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i|, \quad (2.3)$$

где  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  — положение  $i$ -ой точки,  $n_i = n(\vec{r}_i)$  — показатель преломления в  $i$ -ой точке,  $N$  — общее число точек. Поскольку положение первой и последней точки зафиксировано, задача о нахождении траектории радиолуча сводится к поиску экстремума функции  $S = S(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_P)$ , где  $P = N - 2$

– число подвижных точек траектории. Тогда функционал (2.3) представляет собой многомерную функцию  $S(\mathbf{r})$  положений точек в  $D \times P$ -мерном пространстве параметров, где  $D$  – размерность задачи (в нашем случае двумерная или трехмерная). Примем в последующих формульных выражениях обозначения, в соответствии с которыми полужирные символы представляют собой вектора в  $D \times P$ -мерном конфигурационном пространстве функционала  $S(\mathbf{r})$ , а символы со стрелкой представляют собой вектора в  $D$ -мерном пространстве. Соответственно, выражение  $\mathbf{r} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_P)$  представляет собой многомерный вектор в пространстве функционала  $S(\mathbf{r})$ , компонентами которого являются радиус-вектора  $\vec{r}_i$  точек ломаной кривой. Другими словами, многомерный вектор  $\mathbf{r}$  задает конфигурацию системы подвижных точек. Таким образом, кривая  $\gamma$  аппроксимируется кусочно-линейной кривой, соединяющей  $P$  подвижных точек (см. рис. 2.1). При этом концы  $A$  и  $B$  траектории зафиксированы в соответствии с граничными условиями, а систему, состоящую из положений  $P$  промежуточных точек, требуется последовательно привести к оптимальной конфигурации [105].

Отметим, что представление луча в кусочно-линейном виде (2.3) не является единственным. В работе [106] было показано, что использование метода Симпсона для приближенного расчета функционала  $S(\mathbf{r})$  дает выигрыш в скорости и точности расчета. В зависимости от специфики задачи возможны вариации, как по форме представления луча, так и по дискретизации. Например, очевидно, в случае сильно искривленного луча, большое число точек является предпочтительным, а в случае луча близкого к прямой линии, минимальное число точек является достаточным для его описания.

Перед непосредственным рассмотрением вариационного уравнения (2.2) важно установить соответствие терминов стационарная точка (или стационарное решение) и радиолуч. В многомерном пространстве функционала  $S(\mathbf{r})$  стационарная точка (в частности, минимум, максимум и т.д.) есть отображение всей конфигурационной системы кусочно-линейного представления радиолуча. Иначе говоря, в результате перехода от  $D$ -мерного регулярного пространства к многомерному  $D \times P$  пространству функционала  $S(\mathbf{r})$ , кривая  $\gamma$  радиолуча отображается в точку. Поэтому здесь и далее под терминами стационарная точка, экстремум, минимум и т.д. понимается вся траектория радиолуча, соединяющая

граничные точки  $A$  и  $B$  и удовлетворяющая принципу Ферма, записанному в виде (2.2).

Важно отметить, что формулировка принципа Ферма (см. формулу (2.2)) не накладывает ограничений на тип стационарных точек. При этом довольно значительную часть решений составляют минимумы функционала. В настоящее время поиск локальных минимумов многомерных функций является известной и хорошо изученной задачей. Многие численные методы поиска минимума многомерной функции основаны на вычислении отрицательного градиента целевой функции:

$$\mathbf{F} = -\vec{\nabla}_i S(\mathbf{r}) = \left( \vec{F}^1, \vec{F}^2, \dots, \vec{F}^P \right), \quad (2.4)$$

где  $\vec{\nabla}_i \equiv \partial/\partial \vec{r}_i$ .

Остановимся на еще одном важном аспекте вариационного метода — проецировании сил. Этот прием является адаптацией метода упругой нити (англ. nudged elastic band method), разработанного и широко использованного для определения минимумов энергетических уровней и переходов, а также эффектов туннелирования, химических реакций и диффузионных процессов [104; 107]. Обоснование введения техники проецирования сил заключается в том, что только поперечные смещения определяют положение траектории в пространстве [32]. При этом поперечные смещения рассчитываются на основе перпендикулярной к траектории компоненты градиента функционала  $S(\mathbf{r})$ . Именно эту спроецированную силу следует включать в процедуру оптимизации положений точек кусочно-линейного представления луча. Перпендикулярная компонента может быть вычислена исключением из градиента функционала  $S(\mathbf{r})$  ее касательной компоненты:

$$\vec{\nabla}_i S(\mathbf{r}) \Big|_{\perp} = \vec{\nabla}_i S(\mathbf{r}) - \left( \vec{\nabla}_i S(\mathbf{r}) \cdot \vec{\tau}_i \right) \vec{\tau}_i. \quad (2.5)$$

Единичный вектор касательной  $\vec{\tau}_i$  к траектории в каждой  $i$ -ой точке может быть рассчитан, используя следующую формулу:

$$\vec{\tau}_i = \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_{i-1}}{|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_{i-1}|}. \quad (2.6)$$

Проецирование силы (см. формулу (2.5)) позволяет значительно сократить вычислительные затраты, поскольку продольные смещения участвуют в

процессе оптимизации, однако не определяют положение траектории в пространстве [105]. С другой стороны проецирование сил может привести к неоднородному распределению точек вдоль траектории, в результате чего часть информации о траектории будет потеряна [105]. Решением этой проблемы является введение упругих сил взаимодействия между соседними точками траектории [104; 107]. Введение силы упругости, помимо проецирования сил, является важной частью метода упругой нити, позволяющее контролировать распределение точек вдоль траектории. Запишем выражение для силы упругости, действующей на каждую  $i$ -ю точку траектории:

$$\vec{F}_i^s = \kappa (|\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i| - |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|) \vec{\tau}_i, \quad (2.7)$$

где  $\kappa$  – константа силы упругости. Выбор постоянного значения константы  $\kappa$  приводит к равномерному распределению точек вдоль траектории. Неравномерное распределение точек может быть достигнуто путем замены константы  $\kappa$  на функцию, где значение  $\kappa$  может выбираться пропорционально локальной кривизне луча.

Следует отметить, что введение упругих сил (2.7) взаимодействия не оказывает значительного влияния на процесс сходимости, поскольку спроецированные силы (2.5), и упругие силы (2.7) ортогональны друг другу. Таким образом, формулы (2.5) – (2.7) составляют основу определения прямого вариационного метода, использование которого в процедуре оптимизации приводит к нахождению решений граничной задачи о расчете радиолучей. Окончательное выражение для вектора силы принимает следующий вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^\perp + \mathbf{F}^s, \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{F}^\perp = (\vec{F}_1^\perp, \vec{F}_2^\perp, \dots, \vec{F}_P^\perp)$  и  $\mathbf{F}^s = (\vec{F}_1^s, \vec{F}_2^s, \dots, \vec{F}_P^s)$  – многомерные вектора, компоненты  $\vec{F}_i^\perp = -\vec{\nabla}_i S(\mathbf{r}) \Big|_\perp$  и  $\vec{F}_i^s$  которых определяются по формулам (2.5) и (2.7) соответственно.

Для минимизации силы  $\mathbf{F}$  использовалась оптимизация методом проецирования скорости (англ. velocity projection optimization) [108] (см. также Приложение А), которая является вариантом моделирования классической динамической системы с трением, где эффекты диссипации воспроизводятся при помощи проецирования скорости на направление силы. Достоинствами такой оптимизации

ции являются простота её реализации и высокая степень надёжности. Как и все градиентные методы, эта процедура сходится к тому решению, которое расположено ближе всего к начальному приближению. Если же решений несколько (а такие случаи известны в задачах распространения радиоволн), то необходимо организовать выборку начальных приближений. Наконец, если решения граничной задачи по тем или иным причинам не существует (это означает либо отсутствие минимума функционала фазового пути, либо расположение этого минимума в недостижимых областях пространства: на бесконечности, внутри земной коры и т. д.), то процедура такой оптимизации либо не будет сходиться, либо будет неустойчивой относительно увеличения числа точек вдоль траектории радиолуча. Далее продемонстрируем пример работы прямого вариационного метода для расчета радиотрассы в двумерной модельной ионосфере.

В качестве среды распространения радиоволн рассмотрим двумерную изотропную модель ионосферы [52], где профиль электронной концентрации зависит только от высоты:

$$N_e(z) = N_{max} \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{z - z_0}{\Delta z_0} - \exp \left( -\frac{z - z_0}{\Delta z_0} \right) \right], \quad (2.9)$$

где  $z_0 = 300$  км – высота максимума электронной концентрации на высотах ионосферы,  $\Delta z_0 = 220$  км – полутолщина слоя,  $N_{max} = 1 \times 10^6$  см<sup>-3</sup> – значение электронной концентрации в максимуме слоя. Связь плазменной частоты с электронной концентрацией задается следующей формулой [51]:

$$f_p(z) = \sqrt{80.8 \times N_e(z)}. \quad (2.10)$$

Профиль плазменной частоты, заданный по формуле (2.10), представлен на рис. 2.2. Показатель преломления среды при отсутствии магнитного поля и соударений может быть записан в виде [51]:

$$n = \sqrt{1 - \left( \frac{f_p}{f} \right)^2}, \quad (2.11)$$

где  $f$  – частота радиоволны,  $f_p$  – плазменная частота, определяемая выражением (2.10). Таким образом, показатель преломления зависит не только от свойств среды, но и от частоты излучаемой радиоволны. При этом критическая частота

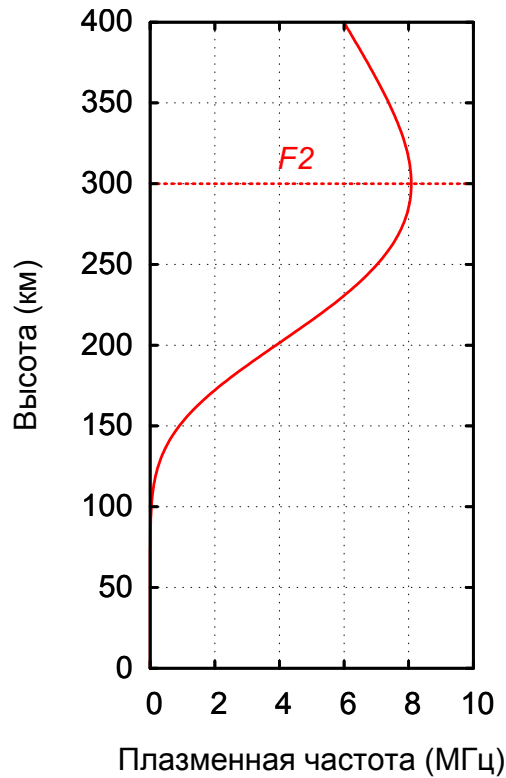


Рисунок 2.2 — Профиль плазменной частоты ионосферы, заданный по формуле (2.9).

параболического слоя  $f_{cr}$  определяется по формуле  $f_{cr} = \sqrt{80.8 \times N_{max}}$ , и равна в нашем случае 8 МГц.

Рассмотрим гипотетическую радиотрассу протяженностью 1000 км, максимальная применимая частота (МПЧ) которой составляет  $\approx 15$  МГц. Выберем частоту радиоволны равной 12 МГц, что соответствует диапазону между критической и МПЧ гипотетической радиотрассы. Численное решение лучевых уравнений для данной модельной среды показывает наличие двух лучевых траекторий в виде верхнего и нижнего лучей. Применим метод минимизации для определения верхнего луча. На рис. 2.3б представлены результаты поиска верхнего луча методом минимизации с использованием начального приближения заданного на высоте 300 км. Как видно на рисунке, кусочно-линейное представление радиолуча в ходе итерационного процесса минимизации сходится к верхнему лучу. Наблюдается полное согласие между аналитическим решением и решением, полученным вариационным методом (см. рис. 2.3). Отметим, что в данном примере минимизация с заданием начальных приближений выше высоты нижней границы ионосферы, равной 80 км, всегда сходится к единственному верхнему лучу. Для начальных приближений, заданных ниже 80 км, траекто-



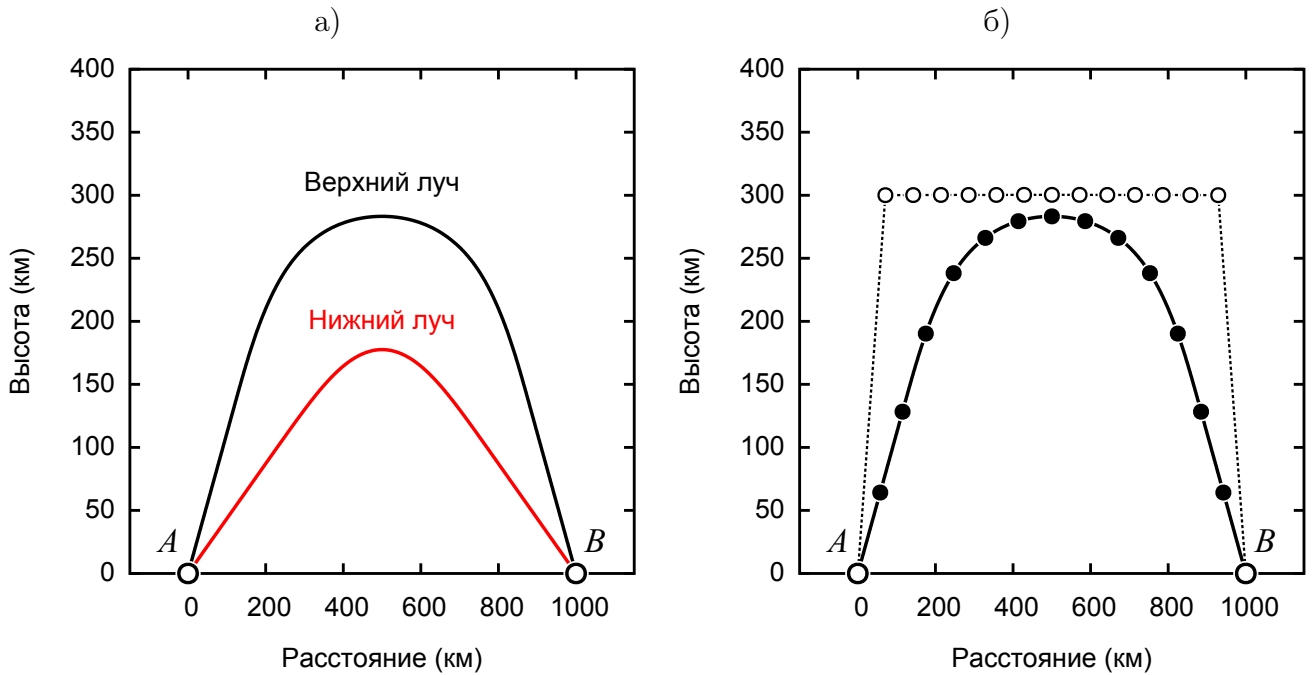


Рисунок 2.3 — Лучевые траектории радиоволны с частотой 12 МГц, соединяющие заданные положения передатчика  $A$  и приемника  $B$  в двумерной изотропной ионосфере (а). Электронная концентрация задается в соответствии с формулой (2.9). Известные решения лучевых уравнений в виде верхнего и нижнего луча представлены черной и красной линиями; Результаты численных расчетов прямой минимизацией представлены справа (б). Пустыми черными кружками и пунктирной линией представлено начальное приближение. Сплошными черными кружками и сплошной черной линией изображено найденное решение.

рия сходится к тривиальному решению – прямой линии, соединяющей точки  $A$  и  $B$ . Заметим, что такая траектория также является решением граничной задачи. Показатель преломления на высотах ниже 80 км составляет  $n \approx 1$  (см. формулы (2.9) – (2.11)), следовательно, прямая линия, соединяющая точки  $A$  и  $B$  является решением, соответствующим дополнительному локальному минимуму. Прямолинейное лучевое распространение (или приземное) будем считать отдельным тривиальным решением вариационного уравнения (2.2).

Данный пример демонстрирует простейший случай многолучевости граничной задачи. Показано, что метод минимизации сходится к ближайшему от начального приближения лучу. Очевидно, что для определения всего множества лучей требуется выборка набора начальных приближений, обеспечивающих сходимость к различным решениям. Однако на практике, в случае трех-

мерной неоднородной среды, подбор начального приближения становится весьма сложной задачей. Обсуждение проблемы подбора начальных приближений и ее решение будет представлено позднее.

Также следует отметить, что ни одно начальное приближение не позволило определить единственный нижний луч (см. рис. 2.3). Действительно, как обсуждалось в работе [101], нижние лучи не удовлетворяют условию на минимум функционала, поэтому методы минимизации не способны его найти. Очевидно, что для определения нижних лучей необходимо правильно идентифицировать соответствующий тип экстремума и выработать подходы к его определению. В следующем разделе будет рассмотрена методика идентификации экстремумов функционала  $S(\mathbf{r})$ .

## 2.2 Типы экстремумов функционала радиолуча

В данном разделе представлена методика идентификации экстремумов функционала (2.3), соответствующих различным типам лучевых траекторий. Методика впервые была представлена в работах [109; 110] и получила название «экспресс анализ». Мотивацией для создания численной процедуры экспресс анализа стала необходимость в решении проблемы определения нижних лучей вариационным методом. В частности, целью создания численного экспресс анализа является ответ на вопрос: каким типам стационарных решений соответствуют лучевые траектории, в особенности нижние лучи. Далее представлено подробное описание предложенной методики и примеры расчетов для модельной среды.

Для реализации экспресс анализа необходимо задать набор виртуальных кривых в некоторой окрестности лучевых траекторий – решений исходной граничной задачи. В соответствии с теорией вариационного исчисления [103], виртуальные траектории и лучи должны быть близки в смысле близости нулевого и первого порядка. Рассчитав значения фазового пути полученных виртуальных траекторий, можно качественно оценить поведение функционала (2.3) и определить к какому типу соответствует то или иное решение краевой задачи.

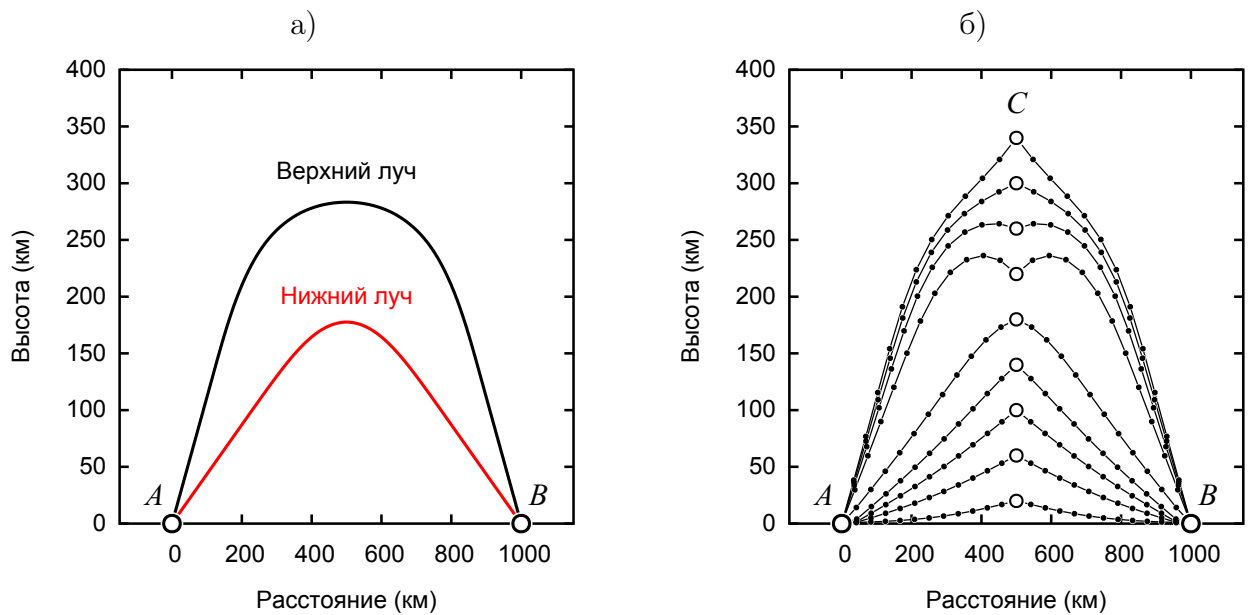


Рисунок 2.4 — Слева представлены решения лучевых уравнений (а) для радиоволны с частотой 12 МГц в среде, заданной согласно формуле (2.9). Справа – набор виртуальных лучей (б), полученных с применением трехточечной схемы и прямой минимизацией. Черные пустые кружки представляют фиксированные точки, а черные сплошные кружки – подвижные точки траектории.

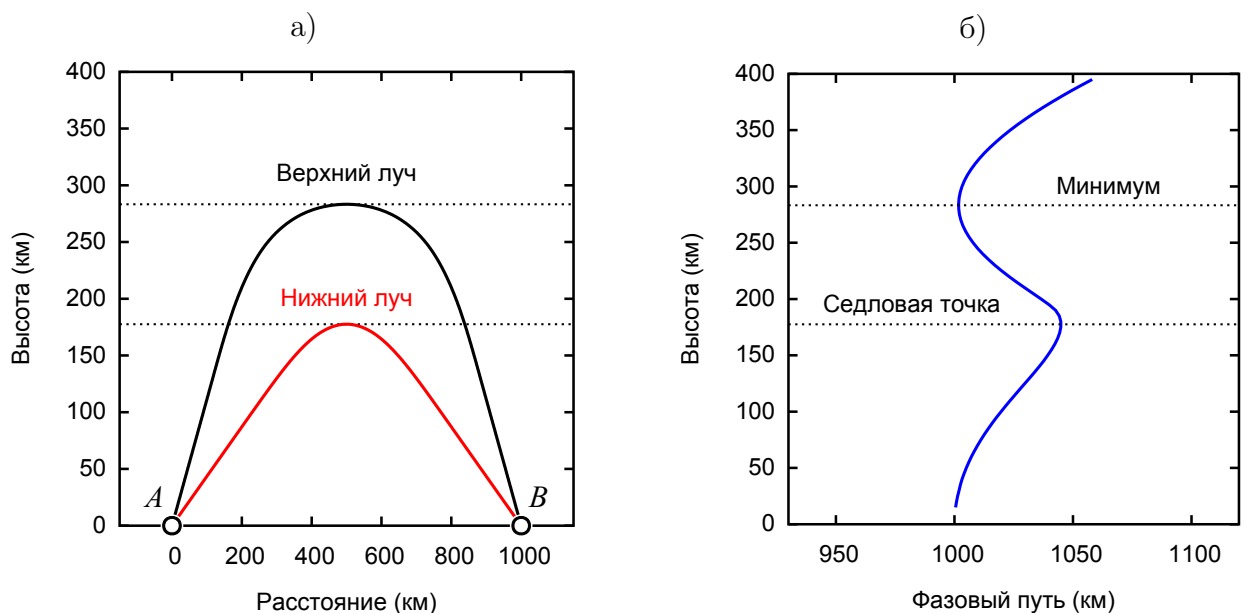


Рисунок 2.5 — Сравнение решений граничной задачи (а) с результатом исследования функционала радиолуча, полученного методикой экспресс анализа (б).

Для начала примем следующие упрощения:

1. Среда представляет собой двумерную изотропную модель ионосферы, где отсутствуют горизонтальные градиенты электронной концентрации;
2. Задание виртуальных лучей основано на трехточечной схеме. Помимо граничных точек  $A$  и  $B$  задается квазификсированная центральная точка  $C$  (вершина траектории). Для трех фиксированных точек применяется метод минимизации, задающий оптимальную форму виртуального луча;
3. Последовательно фиксируя точку  $C$  в рассматриваемой области, получаем набор кривых имитирующих виртуальные лучи. Исследование функционала (2.3) осуществляется на основе анализа фазовых путей набора виртуальных лучей.

Рассмотрим пример использования методики экспресс анализа. В модельной ионосфере, заданной по формуле (2.9), горизонтальный градиент электронной концентрации равен нулю, следовательно, радиолучи отраженные от ионосферных слоев имеют симметричный вид. Выберем радиотрассу с частотой равной 12 МГц, где положения передатчика и приемника заданы на поверхности Земли в точках  $A$  и  $B$  с горизонтальными координатами 0 и 1000 км. Как было показано ранее, для частоты 12 МГц существует два решения: верхний и нижний лучи (см. рис. 2.4а).

Учитывая симметричность лучевых траекторий радиоволны, исследуем поведение фазового пути траекторий в зависимости от высоты точки  $C$ . В данном случае точка  $C$  задается на определенной высоте вдоль вертикальной прямой и остается зафиксированной в течение всего процесса минимизации. Изменяя положение вершины траектории в диапазоне высот от 0 до 300 км с заданным шагом и, минимизируя каждую половину траектории от точки передатчика до вершины и от вершины до приемника, может быть получен набор траекторий (см. рис. 2.4б). При этом из всего набора только некоторые траектории являются наиболее близкими к решениям граничной задачи (верхнему и нижнему лучам). Такое трехточечное представление траектории позволяет исследовать зависимость фазового пути от положения зафиксированной вершины траектории. На рис. 2.5 представлены лучевые траектории радиоволны с частотой 12 МГц и результаты расчетов фазового пути виртуальных лучей

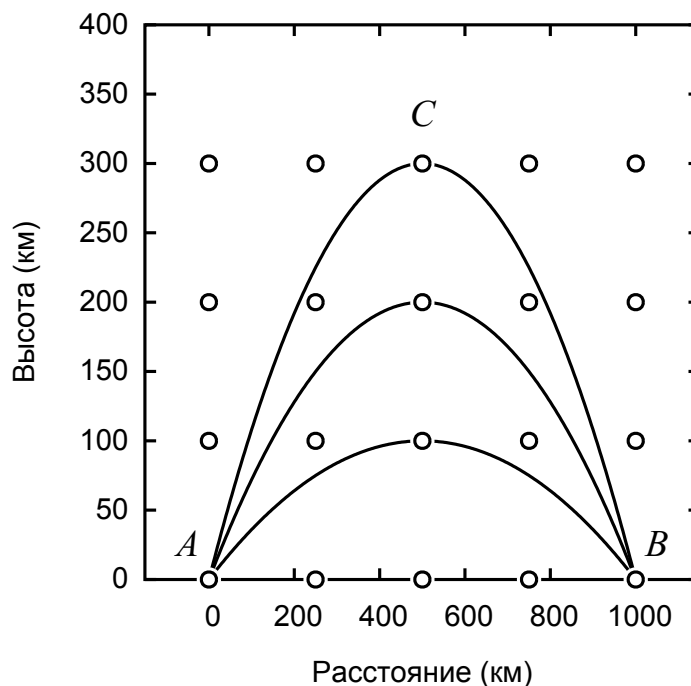


Рисунок 2.6 — Схематичное представление методики экспресс анализа с использованием трехточечной схемы: две точки  $A$  и  $B$  закреплены на поверхности Земли в соответствии с граничными условиями; третья точка (вершина)  $C$  последовательно фиксируется в узлах выбранной сетки (белые кружки). Черные кривые представляют виртуальные траектории, полученные интерполяцией Катмул-Ром сплайном по трем заданным точкам.

в зависимости от высоты вершины, используя трехточечную схему. В данном случае, исследуемый функционал имеет два экстремума: минимум и максимум (последний, как будет показано ниже, соответствует седловой точке). При этом минимум соответствует верхнему лучу, а максимум — нижнему (смотри рис. 2.5).

Далее, для получения пространственной информации о поведении функционала радиолуча, положение вершины траектории следует варьировать как по вертикали, так и по горизонтали, т.е. в узлах некоторой заданной сетки. Но в случае пространственного варьирования точки  $C$ , минимизация может приводить к заданию траекторий, не удовлетворяющих условию близости к решениям. Поэтому вместо метода минимизации используется интерполяция Катмул-Ром (англ. Catmull-Rom) сплайном [111]. Важно, что интерполяционный Катмул-Ром сплайн, построенный на трех опорных точках, повторяет форму оптимальной траектории, где центральная точка  $C$  является вершиной виртуального луча. Полученные таким образом виртуальные траектории близки к

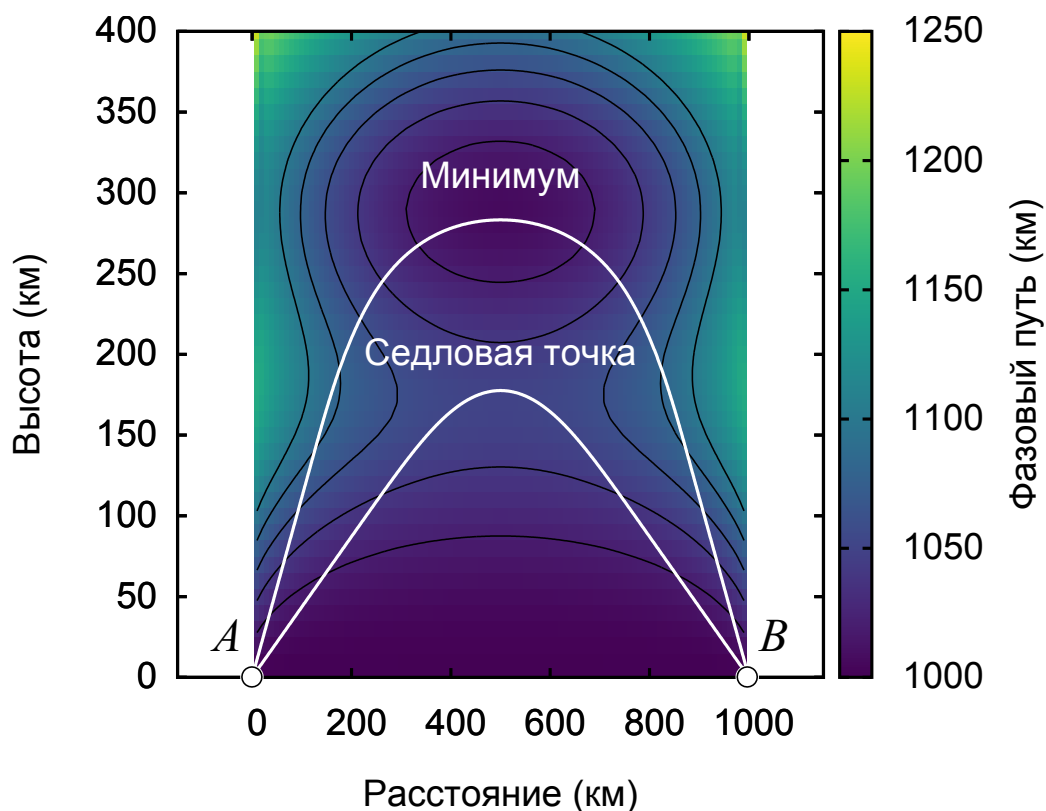


Рисунок 2.7 — Двумерная карта фазового пути виртуальных траекторий, построенная с использованием методики экспресс анализа. Белые линии представляют лучевые траектории радиоволны частоты 12 МГц. Модельная ионосфера задавалась по формуле (2.9).

оптимальным лучам в смысле первого порядка, что удовлетворяет начальным требованиям экспресс анализа. На рис. 2.6 представлен пример интерполяционных кривых, полученных с использованием трехточечной схемы, где положение точки  $C$  последовательно фиксируется в узлах выбранной сетки.

На рис. 2.7 представлена карта двумерного распределения фазового пути для частоты 12 МГц, полученная методом экспресс анализа. Согласно рис. 2.7 каждое решение соответствует стационарной точке функционала фазового пути: верхний луч соответствует минимуму, а нижний луч – седловой точке первого порядка. В результате разработанная методика экспресс анализа позволила осуществить анализ функционала (2.3), используя понятие виртуальных лучей. Результаты сопоставления лучевых траекторий (решений граничной задачи) и карты распределения фазового пути виртуальных лучей (см. рис. 2.7) позволили установить фундаментальную разницу между верхним и нижним лучом. Фазовый путь верхнего луча соответствует минимуму, что объясняет его успешное определение прямым вариационным методом, в основе которого

лежит минимизация функционала радиолуча. При этом наличие седловой точки на карте фазового пути позволяет объяснить трудности при использовании аналогичного подхода для определения нижнего луча. Очевидно, что для нахождения седловой точки необходимо использовать условие, вытекающее из ее определения: максимум в одном направлении и минимум во всех остальных.

Следует отметить, что численная методика экспресс анализа осуществляет исключительно качественный подход к исследованию функционала. Одним из главных результатов применения методики является анализ и визуальное представление поведения функционала (2.3), позволяющее оценить тип экстремума верхних и нижних лучей, а также установить взаимосвязь стационарных точек — решений граничной задачи. Более детальный анализ стационарных решений будет представлен в следующей главе.

### 2.3 Выводы

В данной главе было представлено подробное описание нового вариационного метода для расчета лучевых траекторий радиоволны на основе принципа Ферма. В рамках предложенного подхода, лучевая траектория представлена в виде набора точек, задающих кусочно-линейную аппроксимацию, причем положения конечных точек передачи и приема являются зафиксированными. Поиск решений граничной задачи осуществляется в результате итерационной процедуры сходимости от некоторого начального приближения к оптимальной конфигурации. Процесс сходимости управляется фиктивной силой, действующей на каждую точку траектории. Сила, представляющая собой отрицательный градиент функционала фазового пути, задает направление и модуль смещения системы подвижных точек к тому или иному оптимуму. Также было показано, что работа прямого вариационного метода может быть улучшена заменой продольной компоненты силы на силы упругого взаимодействия между подвижными точками траектории. Причем фиктивные силы упругости направлены исключительно вдоль касательной к траектории. В результате сила упругости позволяет распределять точки равномерно вдоль траектории и не оказывает влияния на направление сходимости к оптимуму.

Результаты численных расчетов в изотропной модели среды показали успешную работу метода по определению верхних лучей. Как обсуждалось в работе [101], нижние лучи не могут быть определены прямой минимизацией функционала. Причиной тому является несоответствие нижних лучей условиям на локальный минимум. Для ответа на вопрос о типе экстремума нижних лучей была реализована численная методика экспресс анализа, позволяющая оценить поведение функционала радиолуча по набору виртуальных лучей. В результате численного эксперимента было показано, что верхние лучи соответствуют локальным минимумам, а нижние лучи – седловым точкам первого порядка. Проблема определения седловых точек заключается в характере данного экстремума. Согласно определению, для седловой точки первого порядка градиент целевой функции во всех направлениях отрицателен, за исключением одного единственного положительного направления. Очевидно, что седловые точки сочетают в себе свойства, как минимума, так и максимума функции. Поэтому для эффективного определения седловых точек необходим метод оптимизации, учитывающий кривизну целевой функции. Универсальный метод оптимизации, определяющий как минимумы, так и седловые точки первого порядка будет рассмотрен в следующей главе.

В заключение текущей главы приведем несколько слов о другом важном аспекте – распространения радиоволн в анизотропной ионосфере. Представленная формулировка вариационного метода предназначена для расчета лучей радиоволны в ионосфере без учета влияния внешнего магнитного поля. Реализация метода с учетом анизотропии среды может быть также основана на поиске минимумов и седловых точек функционала более общего вида, описывающего фазовый путь с учетом геометрии лучевой траектории и ориентации волнового фронта (см. например [83; 101]). Применение прямого вариационного метода для расчета лучевых траекторий радиоволн в анизотропной ионосфере является предметом дальнейших исследований.



## Глава 3. МЕТОД ОБОБЩЕННОЙ СИЛЫ И ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

В данной главе будут рассмотрены основные методы и алгоритмы, разработанные в рамках диссертационного исследования для расчета лучевых траекторий на основе вариационного принципа Ферма. В этой главе отражена суть диссертационной работы и описаны наиболее важные детали разработанного комплекса программ расчета радиотрасс.

Далее речь пойдет о создании универсального метода оптимизации, способного в зависимости от определяемого типа экстремума модифицировать направление сходимости. Важно отметить, что реализация поиска седловых точек отличается от прямой минимизации только способом расчета фиктивной силы. Это позволяет сформулировать единый подход к поиску, как минимумов, так и седловых точек, основанный на понятии обобщенной силы.

### 3.1 Прямая минимизация

Верхние лучи могут быть определены прямой минимизацией функционала фазового пути радиолуча  $S(\mathbf{r})$ . Минимизация основана на обобщенной силе [112], задаваемой как отрицательный градиент функционала  $S(\mathbf{r})$ , продольная компонента которой заменена силой упругости (см. формулу (2.7)):

$$\mathbf{F}^h = -\nabla S(\mathbf{r})|_{\perp} + \mathbf{F}^s, \quad (3.1)$$

где

$$\nabla S(\mathbf{r})|_{\perp} = \left( \vec{\nabla}_1 S(\mathbf{r})|_{\perp}, \vec{\nabla}_2 S(\mathbf{r})|_{\perp}, \dots, \vec{\nabla}_P S(\mathbf{r})|_{\perp} \right), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{F}^s = \left( \vec{F}_1^s, \vec{F}_2^s, \dots, \vec{F}_P^s \right), \quad (3.3)$$

$\vec{\nabla}_i S(\mathbf{r})|_{\perp}$  и  $\vec{F}_i^s$  определяются согласно формулам (2.5) - (2.7) (в формуле (3.1) индекс  $h$  обобщенной силы  $\mathbf{F}^h$  является сокращением слова high – данная формулировка обобщенной силы предназначена для поиска верхних лучей). Сила

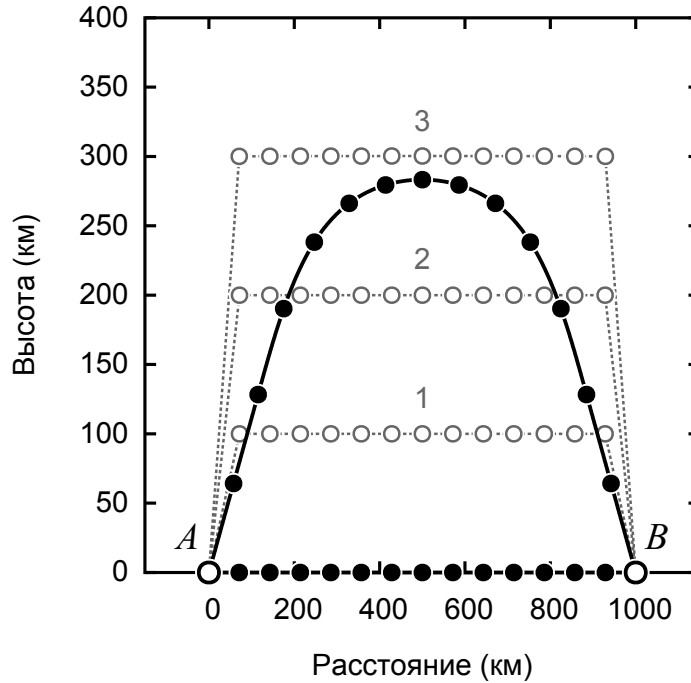


Рисунок 3.1 — Пример расчета верхних лучей радиоволны с частотой 12 МГц методом обобщенной силы. Модельная ионосфера задается формулой (2.9). Серыми кружками и серыми пунктирными линиями изображены начальные приближения. Последовательность задания начальных приближений обозначена цифрами. Черными кружками и черной сплошной линией представлены найденные решения.

упругости не оказывает влияние на форму траектории в пространстве, но при этом обеспечивает связность всех точек траектории. В процессе оптимизации начальная конфигурация точек траектории итерационно сходится к траектории, для которой обобщенная сила  $\mathbf{F}^h$  обращается в ноль. Финальная конфигурация точек траектории, соответствующая нулю обобщенной силы  $\mathbf{F}^h$ , есть дискретное представление решения – верхнего луча. Процедура сходимости силы к нулю может быть реализована различными стандартными подходами: метод наискорейшего спуска, сопряженных градиентов и др. [113]. В нашей работе в качестве процедуры сходимости силы к нулю был выбран метод проецирования скорости (англ. velocity projection optimization)[108]. Подробное описание метода проецирования скорости представлено в Приложении А.

Сходимость метода обобщенной силы к различным локальным минимумам можно осуществить, например, выборкой начальных приближений. Воспользуемся примером радиотрассы с частотой 12 МГц, рассмотренной ранее в разделе 2.1. На рис. 3.1 показано, как три различных начальных приближения,

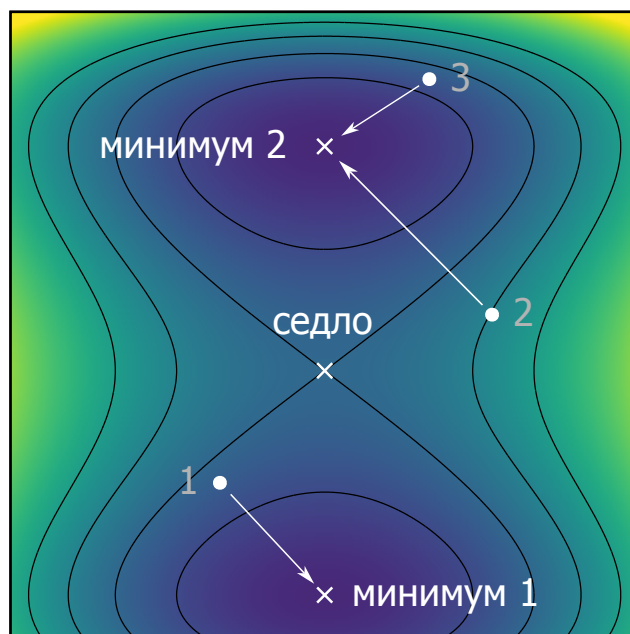


Рисунок 3.2 — Иллюстрация примера, представленного на рис. 3.1, в пространстве функционала радиолуча. Белыми кружками представлены положения начальных приближений. Белой стрелкой схематично обозначен процесс сходимости к локальным минимумам. Белыми крестиками представлены положения стационарных точек целевой функции.

в результате сходимости методом обобщенной силы, определяют два решения. Начальная траектория 1, промежуточные точки которой были заданы на высоте 100 км, сходится к ближайшему тривиальному решению – прямой линии, соединяющей граничные точки  $A$  и  $B$ . В то же время поиск решений, инициированный начальными приближениями 2 и 3, позволил определить верхний луч, отраженный от максимума ионосферного слоя  $F2$ . Иллюстрация поиска локальных минимумов в пространстве фазового пути для данного примера схематично изображена на рис. 3.2. Однако применение такой стратегии поиска решений возможно в простых случаях, когда число решений невелико. На практике, в случае трехмерно неоднородной ионосферы, число лучей, может быть значительно больше, и простая выборка начальных приближений не позволит решить проблему многолучевости.

Проблему подбора начальных приближений целесообразнее решить, используя переходные свойства седловых точек. Если, к примеру, начальное приближение задать в окрестности седловой точки (см. рис. 3.2), то сходимость вдоль единственного направления на убывание целевой функции, позволит опре-

делить два ближайших минимума. Преимуществом такого подхода является детерминированность направления сходимости, которые можно оценить, используя вторую производную функционала фазового пути. Далее рассмотрим формулировку метода обобщенной силы для поиска нижних лучей (седловых точек первого порядка).

### 3.2 Поиск седловых точек

Нижние лучи соответствуют седловым точкам функционала фазового пути, и следовательно они не могут быть найдены прямой минимизацией целевой функции. Для успешного поиска седловых точек необходимо использовать метод оптимизации с учетом второй вариации функционала  $S(\mathbf{r})$ . В настоящее время известны различные формулировки методов поиска седловых точек в многомерном пространстве параметров. Задача об определении седловых точек находит свое применение в различных областях науки [104; 107].

Основная идея метода поиска седловых точек первого порядка заключается в следующем. Для определения седловых точек используется итерационный метод второго порядка. На этапе инициализации метода задается начальное приближение вблизи заданного локального минимума. Далее запускается первый этап сходимости к седловой точке, суть которого заключается в итерационной процедуре выхода из области локального минимума вдоль градиента целевой функции (см. рис. 3.3). Поскольку движение вдоль градиента в конечном итоге приведет в область локального максимума, направление движения после выхода из области минимума следует скорректировать. Причем корректировка должна быть выполнена с учетом условия минимизации во всех направлениях, кроме одного направления на максимум. Направление максимизации целевой функции оценивается по набору собственных значений векторов матрицы Гессе для исходного функционала. Важными составляющими метода поиска седловых точек являются оценка минимального собственного значения и соответствующего ему собственного вектора (минимальной моды) матрицы Гессе и проецирование гессиана в подпространство ортогональное траектории

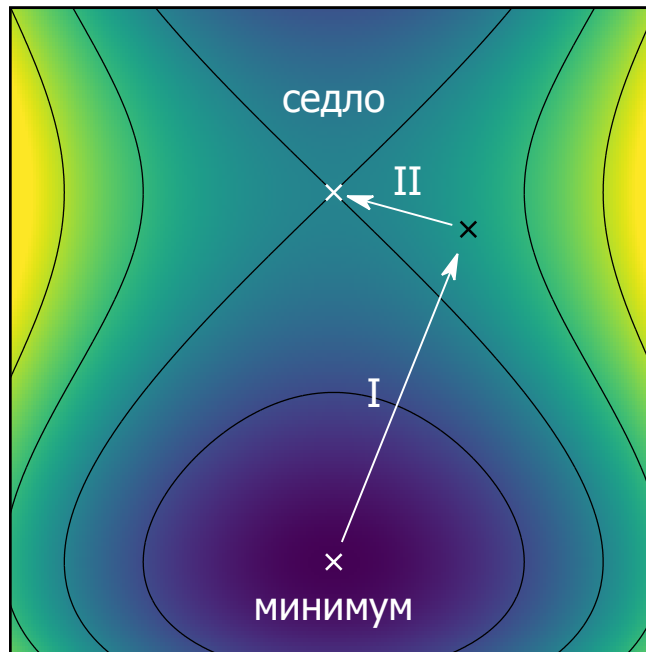


Рисунок 3.3 — Иллюстрация метода поиска седловой точки в пространстве функционала радиолуча. Белым крестиками в минимуме и седловой точке обозначены положения решения в начале и конце процедуры оптимизации соответственно; черным крестиком — промежуточное положение в момент смены знака минимального собственного значения гессиана радиолуча. Белыми пунктирными линиями схематично изображен процесс сходимости решения от минимума к седловой точке.

радиолуча. Такая стратегия есть суть поиска седловых точек первого порядка. Рассмотрим методику поиска седловых точек более подробно.

Инициализация итерационной процедуры поиска седловой точки происходит в окрестности верхнего луча, соответствующего локальному минимуму функционала  $S(\mathbf{r})$ . Далее, необходимо осуществить выход из области минимума, в которой все собственные значения матрицы Гессе положительно определены, и попасть в область «притяжения» седловой точки, где одно из собственных значений гессиана отрицательно. Выход из области локального минимума можно осуществить различными способами, однако следует отметить, что в данном исследовании направление движения вдоль градиента, как и движение вдоль минимальной моды, являются надежными способами выхода из области локального минимума. Свидетельством попадания в область седловой точки является смена знака минимального собственного значения матрицы Гессе. После того, как минимальное собственное значение стало отрицательным, необходимо переопределить обобщенную силу  $\mathbf{F}^l$  таким образом, чтобы она соответствовала

окрестности локального минимума, а не седловой точке. Этого можно добиться, инвертировав компоненту градиента вдоль минимальной моды, т.е. собственного вектора гессиана, соответствующего минимальному собственному значению. С учетом процедур проецирования сил и введения сил упругости, представленных ранее (см. формулы (2.5) и (2.7)), формула обобщенной силы для оптимизации нижних ионосферных лучей имеет следующий вид [112; 114]:

$$\mathbf{F}^l = \begin{cases} \nabla S(\mathbf{r})|_{\perp} + \mathbf{F}^s & \text{или} & (\nabla S(\mathbf{r})|_{\perp} \cdot \mathbf{Q}_{\lambda}) \mathbf{Q}_{\lambda} + \mathbf{F}^s, \text{ если } \lambda \geq 0, \\ -\nabla S(\mathbf{r})|_{\perp} + 2(\nabla S(\mathbf{r})|_{\perp} \cdot \mathbf{Q}_{\lambda}) \mathbf{Q}_{\lambda} + \mathbf{F}^s, & \text{если } \lambda < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Здесь  $\lambda$  – минимальное собственное значение гессиана и  $\mathbf{Q}_{\lambda}$  – соответствующий минимальному собственному значению нормированный собственный вектор или минимальная мода.

Аналогично поиску верхних лучей точки траектории сходятся к оптимальной форме стандартной процедурой оптимизации, дополненной обобщенной силой  $\mathbf{F}^l$  (в формуле (3.4) индекс  $l$  обобщенной силы  $\mathbf{F}^l$  является сокращением слова *low* – данная формулировка обобщенной силы предназначена для поиска нижних лучей). Конфигурация точек траектории, соответствующая нулевому значению силы  $\mathbf{F}^l$ , является дискретным представлением нижнего луча.

Отметим, что алгоритм поиска нижнего луча принципиально почти не отличается от поиска верхнего луча, представленного ранее. Отличие заключается лишь в определении обобщенной силы  $\mathbf{F}^l$ . Кроме того на начальную конфигурацию траектории не налагаются требования близости к решению. Начальное приближение необходимо задать в окрестности локального минимума, при этом его удаленность от искомого решения не является критической. Обычной практикой является задание начальной конфигурации путем случайного набора малых смещений точек траектории от положения найденного локального минимума (верхнего луча). Сгенерировав случайным образом набор различных траекторий вблизи локального минимума (верхнего луча) и применив для каждого варианта метод поиска седловых точек можно определить совокупность седловых точек окружающих данный локальный минимум. Таким образом, процесс поиска нижних и верхних лучей взаимосвязан. Более того справедливо и обратное утверждение. Найденное седло является отправной точкой для поиска локального минимума. Для этого достаточно применить ранее представленный

метод минимизации. Если учесть во внимание, что седловая точка первого порядка является точкой перевала между двумя близлежащими минимумами, то метод минимизации может не только вернуть решение в исходное состояние, но и определить новое решение. В данной трактовке переходное свойство седловых точек является основой для построения глобальной процедуры поиска решений граничной задачи, которая будет представлена в параграфе 3.3.

В соответствии с формулой (3.4) для успешного поиска нижних лучей необходима оценка собственных значений и векторов гессиана целевой функции  $S(\mathbf{r})$  на каждой итерации процесса оптимизации. Поэтому рассмотрим подробнее процедуру расчета гессиана. Как было показано в параграфе 3.1, основным требованием оптимизации является поперечное смещение точек траектории для успешного определения верхних и нижних лучей. Соответственно, гессиан целевой функции должен рассматриваться в подпространстве ортогональном к траектории радиолуча. Для этого удобнее воспользоваться оператором проецирования. Это техника использовалась для оценки гессиана в искривленном конфигурационном пространстве магнитных систем [115]. Матрица Гессе, состоящая из частных производных второго порядка функционала  $S(\mathbf{r})$  имеет следующий общий вид:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial z_P} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial y_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial y_1 \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial y_1 \partial z_P} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial z_P \partial x_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial z_P \partial y_1} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial z_P \partial z_P} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Формула (2.15) определяет Гессиан в  $3P$  – мерном расширенном пространстве возможных конфигураций луча. Для расчета матрицы, характеризующей кривизну  $S(\mathbf{r})$  вблизи экстремальных точек, необходимо к гессиану  $H$  применить процедуру проецирования:

$$H_{\perp} = V^T H V. \quad (3.6)$$

Здесь  $V$  – матрица перехода размерности  $3P \times 2P$ , столбцы которой представляют собой базис подпространства. Поскольку гессиан  $H_{\perp}$  определен в  $2P$ - мерном подпространстве поперечных смещений, расчет минимальной моды в исходном  $3P$  - мерном конфигурационном пространстве осуществляется согласно следу-

ющей формуле:

$$\mathbf{Q}_\lambda = V\tilde{\mathbf{Q}}_\lambda, \quad (3.7)$$

где  $\tilde{\mathbf{Q}}_\lambda$  –  $2P$ -мерный собственный вектор  $H_\perp$ , соответствующий минимальному собственному значению.

Рассмотрим подробнее особенности расчета матрицы перехода  $V$  в трехмерном пространстве. Для каждой точки  $i$  вдоль траектории выбирается пара ортогональных векторов  $\vec{\eta}_i$  и  $\vec{\xi}_i$ , лежащих в плоскости перпендикулярной траектории луча. Например,  $\vec{\eta}_i$  может быть задан нормировкой случайно заданного ортогонального к касательному вектору  $\vec{\xi}_i$ . Затем вектор  $\vec{\eta}_i$  определяется в соответствии с векторным произведением  $\vec{\xi}_i = [\vec{\eta}_i \times \vec{\tau}_i]$ . Таким образом, вектора  $\vec{\eta}_i$  и  $\vec{\xi}_i$  составляют базис поперечных смещений  $i$ -ой точки траектории. Соответствующая матрица перехода  $V_i$  примет вид:

$$V_i = \begin{bmatrix} \eta_i^x & \xi_i^x \\ \eta_i^y & \xi_i^y \\ \eta_i^z & \xi_i^z \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

где  $\eta_i^x, \eta_i^y, \eta_i^z$  и  $\xi_i^x, \xi_i^y, \xi_i^z$  – компоненты векторов  $x, y, z$  – компоненты векторов  $\vec{\eta}_i$  и  $\vec{\xi}_i$  соответственно. Учитывая формулу (3.8), запишем матрицу перехода для всей траектории:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_P \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Реализация метода оптимизации для поиска нижних лучей представлена на рис. 3.4. Среда распространения радиоволн и параметры волны выбраны аналогично примеру, приведенному в разделе 2.1. На рисунке 3.4 показаны возможности определения нижних лучей. В каждом поиске подвижные точки ( $P = 13$ ) расположены в окрестности найденных ранее верхних лучей. Для выхода из области минимума использовалось направление вдоль градиента целевой функции  $S(\mathbf{r})$ . В момент смены знака минимального собственного значения  $\lambda$  (см. соответствующую конфигурацию траектории на рис. 3.4) определение обобщенной силы должно быть изменено для успешного определения нижнего луча. Метод проецирования скорости используется на всех этапах сходимости



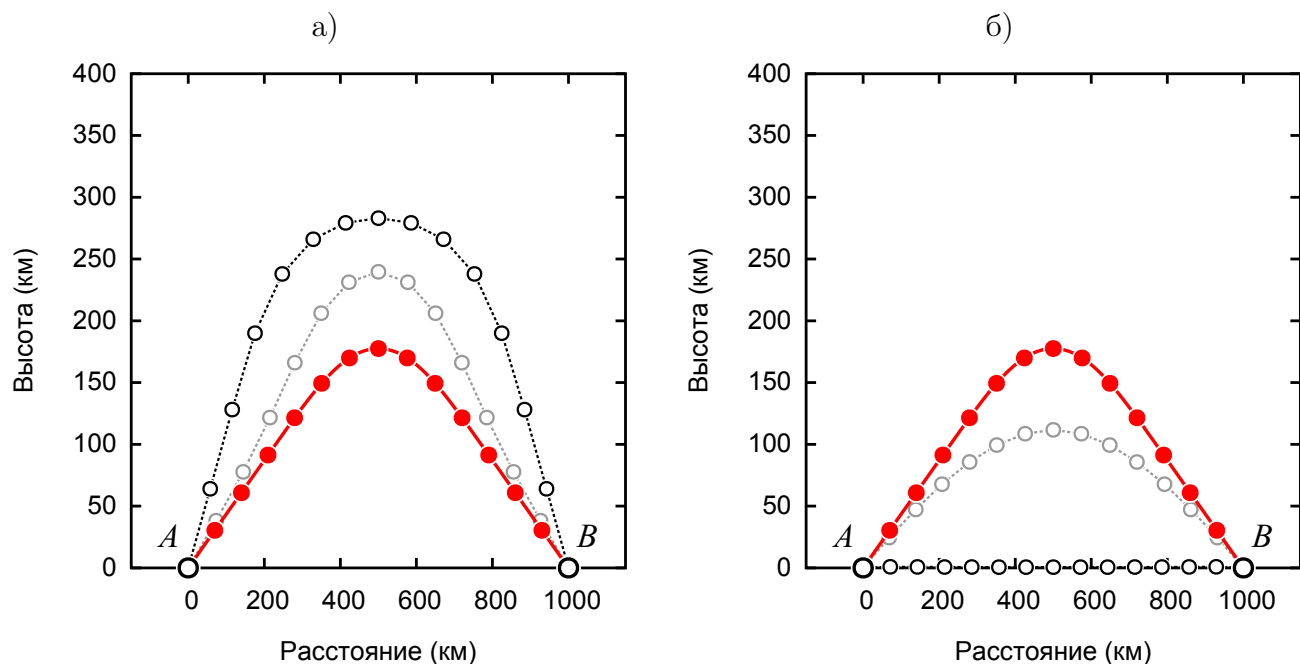


Рисунок 3.4 — Результаты расчета нижнего луча прямым вариационным методом. Аналитическая модель ионосферы задается в соответствии с формулой (2.9); Серыми кружками обозначены положения точек траектории в процессе оптимизации. Начальное приближение представлено пустыми кружками и пунктирной линией. Для начального приближения, заданном на найденном верхнем луче, задается случайное малое смещение в соответствии с алгоритмом поиска седловых точек. Красные линии с кружками показывают найденное решение в виде нижнего луча.

вплоть до достижения нуля модуля силы  $\mathbf{F}^l$ . В данных расчетах критерием сходимости является максимальное значение модуля силы  $\mathbf{F}^l$ , не превышающее значения  $10^{-9}$ . Численная оптимизация в заданной модельной среде позволила определить один нижний луч, отраженный от ионосферного слоя. При этом начальные приближения могут быть заданы как на верхнем луче, так и на прямой линии, соединяющей граничные точки  $A$  и  $B$  на поверхности Земли (см. рис. 3.4).

### 3.3 Глобальная оптимизация

Особенность отображения радиолучей в пространстве функционала  $S(\mathbf{r})$  позволяет построить процедуру поиска всех решений и рассмотреть проблему многолучевости. Для этого в ходе выполнения диссертационной работы был разработан метод глобальной оптимизации, который основан на взаимосвязи минимумов и седловых точек: между двумя локальными минимумами всегда существует как минимум одна седловая точка первого порядка [116]. Поэтому искомые решения могут быть найдены в результате систематического перехода между локальными минимумами через седловую точку (см. рис. 3.5).

Задав начальное приближение на найденном верхнем луче, множество нижних лучей может быть найдено генерацией различных малых смещений точек траектории или, другими словами, заданием малых возмущений траектории. Определив нижний луч, траектория подвергается малому возмущению вдоль известного направления — минимальной моды. Причем направление выбирается обратное от начального верхнего луча. После этого новый верхний луч определяется прямой минимизацией функционала радиолуча  $S(\mathbf{r})$ . Далее приведем подробный алгоритм глобальной оптимизации [112; 117]:

1. Для заданных положений передатчика и приемника, выбираем начальное приближение в виде кусочно-линейной траектории, узлами которой являются подвижные точки. Форма начальной траектории не является критичной для успешной работы метода глобальной оптимизации. Например, наиболее простым приближением является задание точек вдоль прямой линии, соединяющей положения передатчика и приемника.
2. Находим первое решение, используя прямую минимизацию функционала фазового пути (см. параграф 3.1). Если начальное приближение, заданное в пункте 1, уже является минимумом, переходим к пункту 3.
3. Задаем начальную конфигурацию для поиска нижнего луча, генерируя малые смещения точек траектории найденного верхнего луча. Начало поиска нижнего луча осуществляется в окрестности верхнего луча.
4. Осуществляем поиск нижнего луча, используя метод минимальной моды (см. параграф 3.2).

5. Повторяем пункты 3 и 4 до тех пор, пока число неуспешных попыток определения новых нижних лучей не превысит пороговых значений. Число неуспешных попыток задается исходя из специфики задачи.
6. Для каждого найденного нижнего луча задается начальное приближение для поиска верхних лучей посредством задания малых смещений вдоль вектора минимальной моды в обратном направлении от ранее найденного верхнего луча. Поиск верхних лучей стартует в окрестности нижнего луча.
7. Находим соответствующие верхние лучи, используя метод минимизации функционала фазового пути (см. параграф 3.1).
8. Для каждого нового верхнего луча повторяем пункты 3 — 7 до тех пор, пока все лучевые траектории не будут найдены.

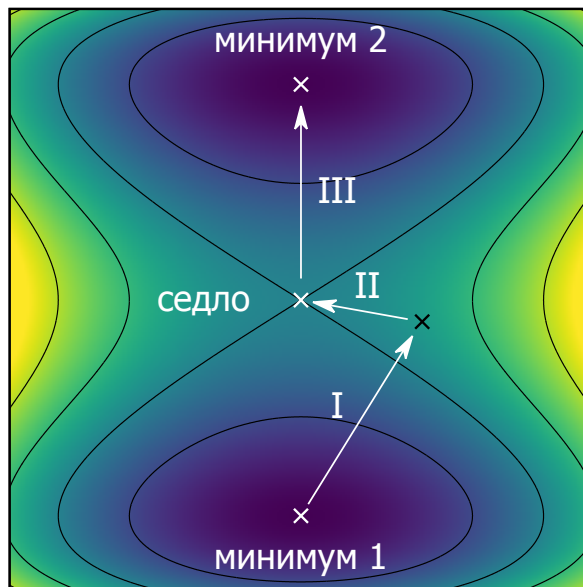


Рисунок 3.5 — Иллюстрация метода глобальной оптимизации в пространстве функционала радиолуча. Белым крестиками обозначены положения стационарных точек. Белыми сплошными стрелками схематично изображен процесс систематического поиска решений через седловую точку. Черный крестик обозначает момент смены знака минимального собственного значения гессиана функционала.

Рис. 3.6 иллюстрирует работу глобальной оптимизации, используя метод представленный выше. Для демонстрации работоспособности метода рассмотрим трехмерную аналитически заданную модель ионосферы. Профиль электронной концентрации  $N_e(z)$  определяется согласно формуле (2.9) с аналогичны-

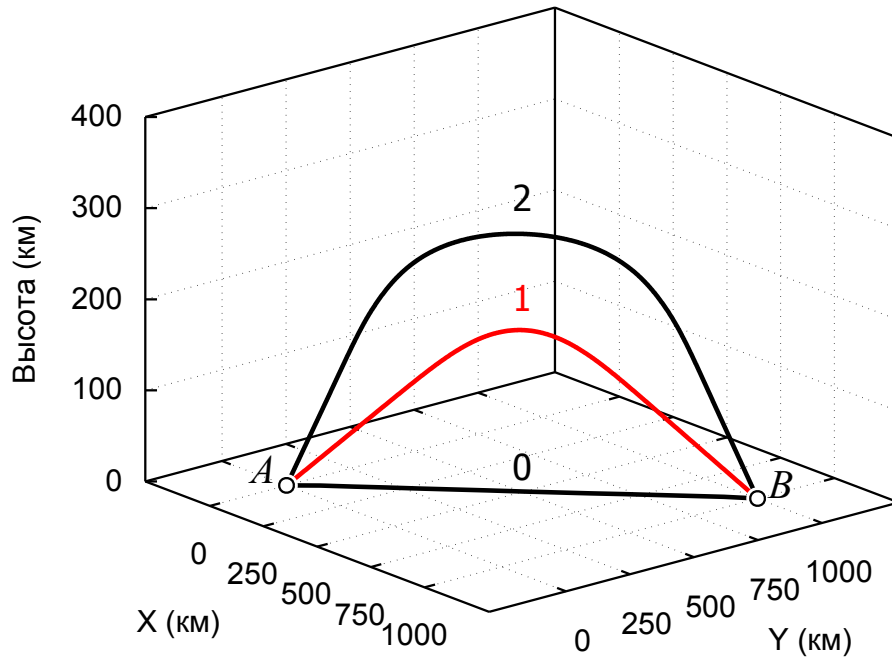


Рисунок 3.6 — Результат применения алгоритма глобального поиска лучей. Модельная среда задается согласно формуле (2.9). Рабочая частота равна 12 МГц. Верхние и нижние лучи представлены черными и красными сплошными линиями.

ми параметрами (см. параграф 2.1). Расчет лучевых траекторий выполнялся между положениями точек  $A$  и  $B$  с радиус векторами  $\vec{r}_A = (0,0,0)$  км и  $\vec{r}_B = (1000, 1000, 0)$  км для рабочей частоты 12 МГц.

В каждом локальном определении луча обобщенная сила итерационно сходилась к нулю с использованием метода проецирования скорости (англ. *velocity projection optimization*). Процесс оптимизации считается завершенным, когда абсолютные значения сил, действующих на каждую точку траектории в отдельности, не превышают  $10^{-9}$ . Инициализация метода глобальной оптимизации осуществляется заданием положений промежуточных точек траектории равномерно вдоль прямой линии соединяющей точки  $A$  и  $B$ . Отметим, что в случае однородной среды, прямая линия является лучем, соответствующим минимуму фазового пути (луч 0 на рис. 3.6). Стартуя с начального приближения, производится несколько случайных смещений траектории с последующим поиском седловых точек методом минимальной моды. В этом случае определено одно решение: луч 1 отраженный от  $F$  слоя ионосферы (см. рис. 3.6). После этого реализуем небольшое смещение вдоль вектора минимальной моды. Последующее применение локальной минимизации позволяет определить луч 2 —

верхний луч, распространяющийся вдоль  $F$  слоя ионосферы. Поиск седловых точек, осуществляемый из окрестности верхнего луча 2, сходится только к лучу 1, который был определен в предыдущей оптимизации с луча 0. Процедура глобальной оптимизации окончена. Три луча были найдены в результате систематического перехода от одного минимума к другому через седловую точку, из них один верхний луч (луч 2), один нижний луч (луч 1) и тривиальное решение (луч 0).

Представленный выше пример показывает важнейшие аспекты разрабатываемого вариационного метода. В частности, информация о взаимосвязи стационарных точек радиолучей позволила построить глобальную процедуру поиска всех лучей, основной идеей, которой является систематический поиск решений. При этом каждое найденное решение является отправной точкой для определения последующих лучей, что автоматически решает проблему подбора начальных приближений для каждого луча.

### 3.4 Выводы

В данной главе представлен вариант вариационного подхода к решению граничной задачи о расчете лучевых траекторий коротких радиоволн, основанный на методе обобщенной силы. Идея метода обобщенной силы заключается в формулировке универсального метода для поиска верхних и нижних лучевых траекторий. Представленная классификация лучевых траекторий основана на фундаментальном различии решений граничной задачи. В пространстве функционала фазового пути лучевым траекториям ставится в соответствие различные типы стационарных точек. В частности показано, что верхние и нижние радиолучи соответствуют минимумам и седловым точкам функционала фазового пути. Формулировка обобщенной силы для нахождения верхних лучей, основанная на прямой минимизации функционала, позволяет определять решения в зависимости от выбранных начальных приближений. Для определения нижних лучей предложен вариант обобщенной силы с использованием метода поиска седловых точек первого порядка. При этом важным условием сходимости

сти является задание начального приближения в окрестности верхнего луча (локального минимума).

Универсальность метода обобщенной силы в оптимизации различных лучей, а также свойство седловых точек, заключающееся в переходном состоянии между локальными минимумами, позволили сформулировать алгоритм глобальной оптимизации для нахождения множества решений граничной задачи. Предложенный вариант глобальной оптимизации обладает рядом преимуществ: решена проблема задания начальных приближений посредством систематического поиска лучей, алгоритм позволяет находить множество решений граничной задачи, решается проблема определения глобального минимума, т.е. луча, соответствующего минимальному фазовому пути. Представленный вариант метода обобщенной силы и глобальной оптимизации предназначен для поиска верхних и нижних односкачковых лучей, однако многоскачковые лучи также важны, поскольку вносят значительный вклад в радиосвязь [112]. Расчет многоскачковых трасс может быть осуществлен включением точек отражения от земной поверхности в процедуру оптимизации. На такие точки по сравнению с другими подвижными точками траектории должны накладываться дополнительные условия. В частности, их перемещения должны осуществляться только вдоль земной поверхности. Подобная идея уже была реализована К. Коулманом [101].

Как уже упоминалось, нижние лучи, рассмотренные в данной работе, соответствуют седловым точкам первого порядка. Такие решения характеризуются одним отрицательным собственным значением гессиана. Другие экстремумы, в которых два или более собственных значения гессиана отрицательны, также удовлетворяют принципу Ферма и, следовательно, также представляют лучевые траектории. Такие седловые точки более высокого порядка можно идентифицировать аналогично седлам первого порядка, выполняя максимизацию фазового пути вдоль направлений, определенных собственными векторами гессиана, соответствующих отрицательным собственным значениям, и минимизацию по всем другим направлениям. Расширение возможностей вариационного метода для поиска решений седлового типа более высокого порядка, а также для расчета многоскачкового распространения, является предметом дальнейших исследований.

## Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА ДЛЯ РАСЧЕТА РАДИОТРАСС

В данной главе представлены результаты численного моделирования радиотрасс с использованием вариационного подхода. Показаны результаты реализации метода обобщенной силы и глобальной трассировки в случае среды распространения радиоволн, заданной в виде аналитических моделей ионосферы. Рассмотрены особенности применения метода обобщенной силы в двумерной и трехмерной неоднородных средах. В частности, обсуждаются вопросы адаптации и применимости метода в средах, где присутствуют разрывы в производной параметра плазменной частоты, а также рассматриваются примеры многолучевости в многослойной среде с учетом горизонтальных неоднородностей. Представлено сравнение вариационного подхода с методом пристрелки и показано практическое применение разработанного метода на примере синтеза дистанционно-частотных характеристик наклонного зондирования.

### 4.1 Численное моделирование лучевых траекторий радиоволн в аналитически заданной среде

#### 4.1.1 Моделирование в параболической модели ионосферы

Рассмотрим двумерную изотропную модель ионосферы [105], где функция электронной концентрации  $N_e(z)$  задается аналитической формулой:

$$N_e(z) = \begin{cases} N_{max} \times \left(1 - (z - z_0/z_m)^2\right), & \text{если } |z - z_0| \leq z_m, \\ 0, & \text{если } |z - z_0| > z_m, \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $z_0 = 300$  км – высота максимума электронной концентрации,  $z_m = 240$  км – полутолщина слоя, определяющая высотный диапазон, в котором электронная концентрация отлична от нуля,  $N_{max} = 1 \cdot 10^6$  см<sup>-3</sup> – электронная концентрация в максимуме параболического слоя. В соответствии с формулой (2.10), верти-

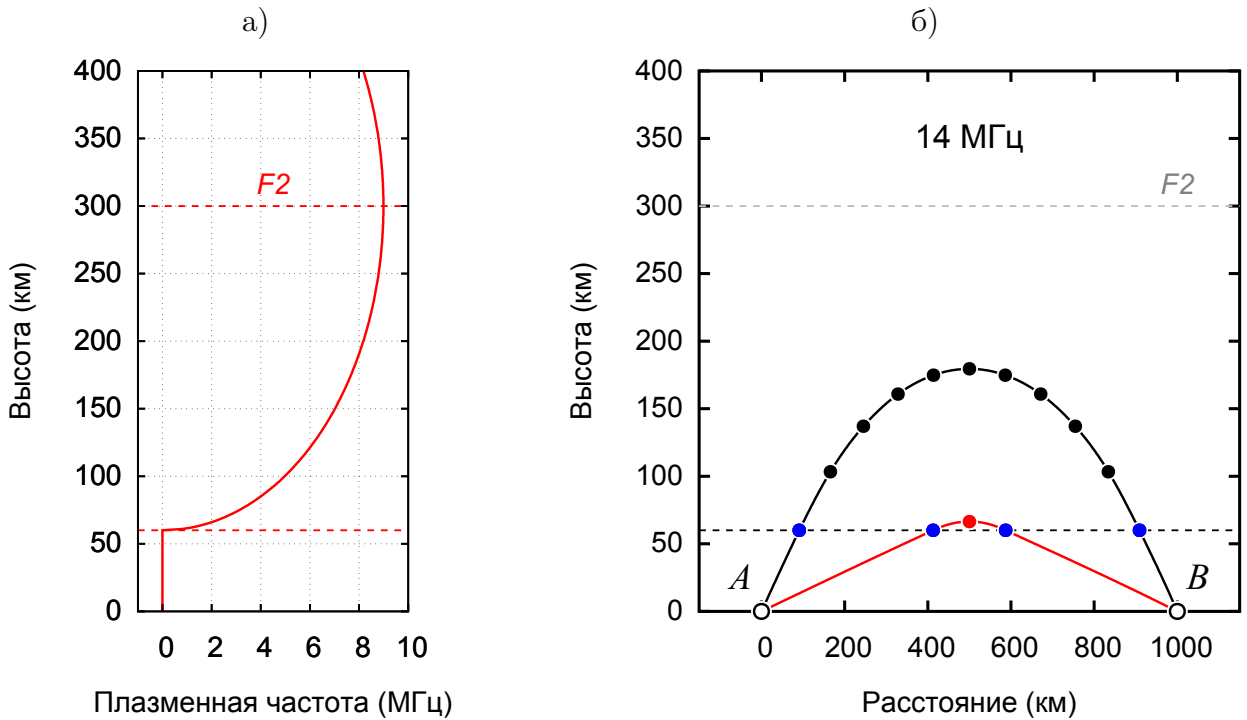


Рисунок 4.1 — Слева (а) представлен профиль плазменной частоты аналитической модели ионосферы, заданной по формуле (4.1). Справа (б) представлены лучевые траектории для радиоволны с частотой 14 МГц для заданных граничных условий. Черные и красные кружки представляют верхний и нижний лучи, найденные методом обобщенной силы и глобальной оптимизацией. Синими кружками обозначены точки траектории, движущиеся только вдоль нижней границы ионосферы (черная пунктирная линия на рис. (б)). Черной и красной сплошными линиями изображены известные решения, полученные в программном пакете Maple, для верхнего и нижнего лучей. Серой пунктирной линией обозначена высота максимума ионосферного слоя  $F2$ .

кальный профиль плазменной частоты выбранной модели ионосферы представлен на рис. 4.1а. Показатель преломления среды при отсутствии магнитного поля и соударений задается по формуле (2.11).

Параболическая модель ионосферы обладает особенностью, которая заключается в наличии разрыва в производной профиля электронной концентрации  $N_e(z)$  на нижней границе ионосферы (60 км) (см. рис. 4.1а). Отметим, что разрыв в производной является препятствием для реализации градиентных методов. Устойчивость итерационного процесса может быть нарушена из-за резкого скачка обобщенной силы, когда точка траектории находится в области, где



параметр среды или ее производная терпит разрыв. Реализация градиентных методов в среде с разрывными является известной проблемой в сейсмологии, которой посвящено множество работ [92—94]. Эта проблема является особенностью распространения сейсмических волн в земной коре, имеющей сложную неоднородную структуру с множеством границ раздела [118]. Как упоминалось ранее, для описания распространения сейсмической волны в моделях земной коры, широко применяется приближение геометрической оптики [119]. Известные методы изгибания и псевдоизгибания (англ. bending и pseudo-bending) [32; 91; 120] являются аналогами метода обобщенной силы и применяются для расчета лучей сейсмических волн в гладких средах с заданными граничными условиями. Известны модификации упомянутых методов для расчета в среде с разрывами, основанные на законе Снеллиуса [93] и представлении луча в виде интерполяционного  $\beta$  сплайна [92].

В данной работе проблема разрыва производной функции среды была решена фиксацией двух точек траектории на высоте 60 км (см. рис. 4.1б). Упомянутые точки траектории луча зафиксированы только по вертикали и могут перемещаться вдоль нижней границы ионосферы. В результате из полного числа подвижных точек траектории  $P$ , свободными остаются  $P - 2$  точки: движение двух точек траектории осуществляется только вдоль нижней границе ионосферы. При этом две граничные точки  $A$  и  $B$  зафиксированы в соответствии с положениями передатчика и приемника. Результат применения метода обобщенной силы представлен на рис. 4.1б. Стоит отметить ряд важных особенностей: (1) данный подход реализуем, поскольку высота нижней границы ионосферы заранее известна и принимает постоянное значение; (2) между граничными точками и точками на нижней границе ионосферы не требуется введения дополнительной дискретизации, так как в неионизированной атмосфере с показателем преломления  $n = 1$  радиолуч распространяется по прямой линии; (3) части лучевой траектории выше и ниже границы ионосферы согласованы, поскольку требование стационарности фазового пути накладываается на всю траекторию, соединяющую граничные точки  $A$  и  $B$ . Существуют подходы для расчета лучей в случайно неоднородной среде, где количество и положение разрывов функции среды и ее первой производной заранее неизвестно [93; 94; 121; 122].

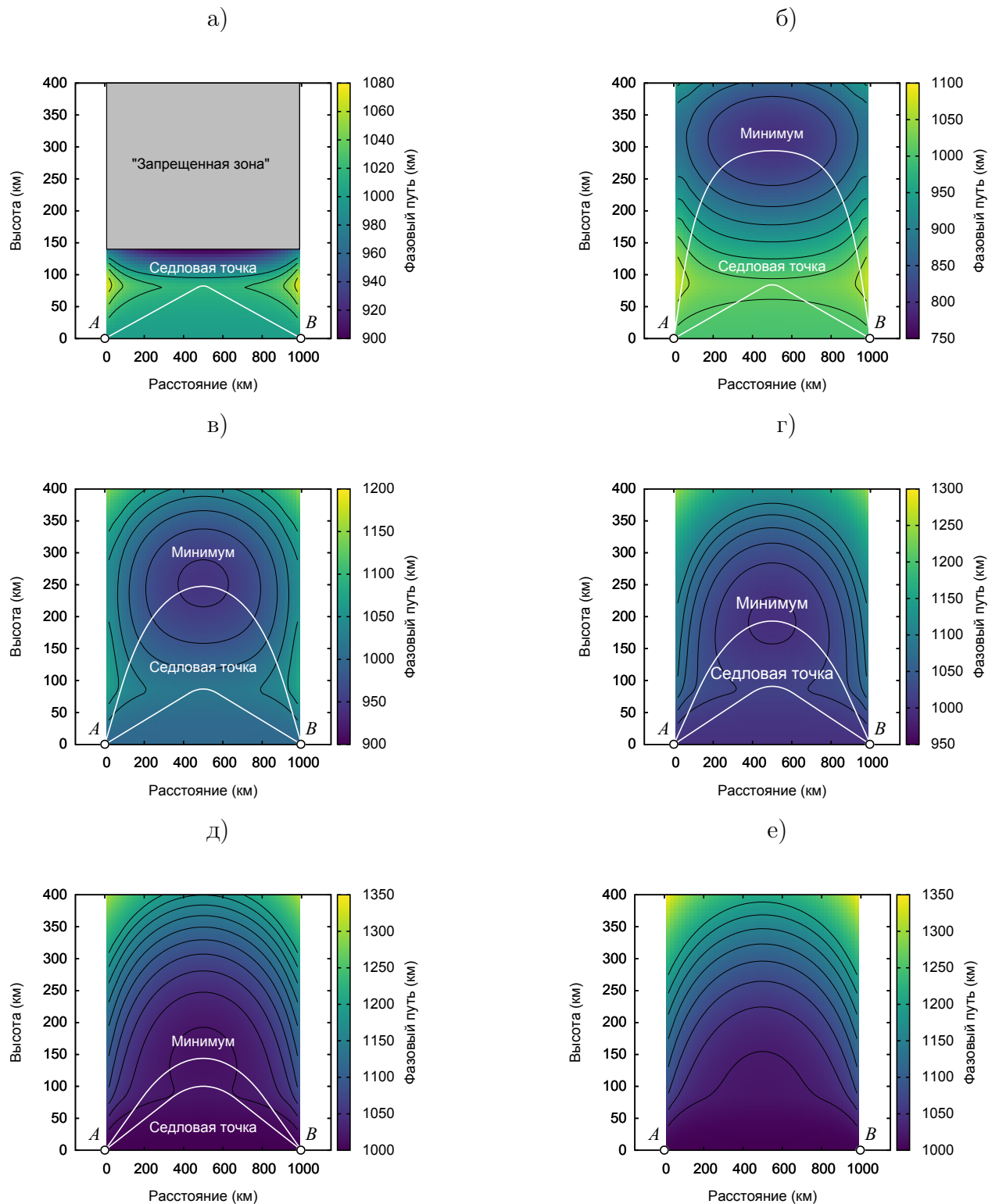


Рисунок 4.2 — Двумерные карты распределения фазового пути лучевых траекторий для диапазона частот 8 – 18 МГц: (а) — 8 МГц, (б) — 10 МГц, (в) — 12 МГц, (г) — 14 МГц, (д) — 16 МГц, (ж) — 18 МГц. Белыми сплошными линиями показаны решения граничной задачи (верхние и нижние лучи) в параболической модели ионосферы.

Наличие разрыва на нижней границе ионосферы требует адаптации глобальной трассировки лучей. В данном случае целесообразно инициализировать глобальный поиск не на поверхности, а в окрестности разрыва. В нашем случае использовалось начальное приближение, где подвижные точки расположены в окрестности 60 км. Далее, последовательно применяя методы минимизации и поиска седловых точек, определяется множество решений граничной задачи. На рис. 4.1б представлены результаты расчетов для радиоволны с частотой 14 МГц. Процедура глобальной трассировки определила два решения в виде верхнего и нижнего лучей, полностью согласующиеся с решениями, полученными в программном пакете Maple.

Далее исследуем особенности суперпозиций стационарных точек функционала фазового пути радиолуча в параболической модели ионосферы с использованием экспресс анализа (см. параграф 2.2). Для этого был выбран диапазон рабочих частот 8 – 18 МГц. На рис. 4.2 представлены карты двумерного распределения фазового пути для соответствующего набора частот. Согласно рис. 4.2 каждое решение соответствует стационарной точке функционала радиолуча. Анализ карт распределения фазового пути радиолуча в зависимости от формы траектории подтверждает фундаментальную разницу между верхним и нижним лучом. Все верхние лучи соответствуют минимумам функционала, а нижние лучи — седловым точкам первого порядка.

Проанализируем полученные результаты численных расчетов. Карта фазового пути для частоты 8 МГц характеризуется наличием нижнего луча и «запрещенной зоны» — области, где показатель преломления принимает иррациональные значения  $n^2 < 0$  (см. формулу (2.11)). На картах фазового пути для частот 10 – 18 МГц представлена эволюция лучевых траекторий и стационарных точек функционала при увеличении рабочей частоты радиоволны. Верхние и нижние лучи и соответствующие им стационарные точки, максимально разнесены для радиоволн с частотами вблизи критической частоты ионосферного слоя  $f_{cr} = 9$  МГц. По мере увеличения рабочей частоты до достижения МПЧ, верхние и нижние лучи и соответствующие им стационарные точки сближаются. На рис. 4.2е показано, что для частоты 18 МГц, превышающей МПЧ, отсутствуют как радиолучи, так и стационарные точки.

На примере численного моделирования лучевых траекторий в параболическом слое показаны возможности использования метода обобщенной силы и

глобальной трассировки для успешного расчета лучевых траекторий в среде с разрывом в производной функции электронной концентрации. Проведенный анализ карт фазового пути показал особенности формирования стационарных точек во всем диапазоне рабочих частот.

#### 4.1.2 Моделирование в двухслоевой экспоненциальной модели ионосферы

Далее рассмотрим пример использования метода обобщенной силы и глобальной оптимизации для решения проблемы многолучевости (нахождения всех или хотя бы большинства существующих решений) в случае многослоевой среды [112]. В качестве среды распространения радиоволн выберем двухслоевую модель ионосферы [52], где профиль электронной концентрации  $N_e(z)$  задается следующим выражением:

$$N_e(z) = N_1 \exp \left[ - \left( \frac{z - z_1}{\Delta z_1} \right)^2 \right] + N_2 \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{z - z_2}{\Delta z_2} - \exp \left( - \frac{z - z_2}{\Delta z_2} \right) \right]. \quad (4.2)$$

Здесь параметры  $N_\beta$ ,  $z_\beta$  и  $\Delta z_\beta$  – максимум электронной концентрации, высота максимума и полуширина слоя  $\beta$  соответственно, где  $\beta = 1$  соответствует идеализированному ионосферному  $E$  слою и  $\beta = 2$  соответствует  $F2$  слою. При этом были выбраны следующие значения параметров среды:  $N_1 = 0.2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$ ,  $N_2 = 1.0 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$ ,  $z_1 = 110 \text{ км}$ ,  $z_2 = 300 \text{ км}$ ,  $\Delta z_1 = 30 \text{ км}$  и  $\Delta z_2 = 150 \text{ км}$ . Согласно формуле (4.2), а также профилю электронной концентрации, представленному на рис. 4.3а, критические частоты слоев  $E$  и  $F2$  равны 4 и 9 МГц соответственно. В зависимости от выбора рабочей частоты радиоволны возможны различные конфигурации лучевых траекторий и различное число получаемых решений.

Рассмотрим пример поиска лучевых траекторий радиоволны с рабочей частотой 12 МГц методом обобщенной силы между точками  $A$  и  $B$ , заданными векторами  $\vec{r}_A = (0, 0) \text{ км}$  и  $\vec{r}_B = (1000, 0) \text{ км}$ . Профиль электронной

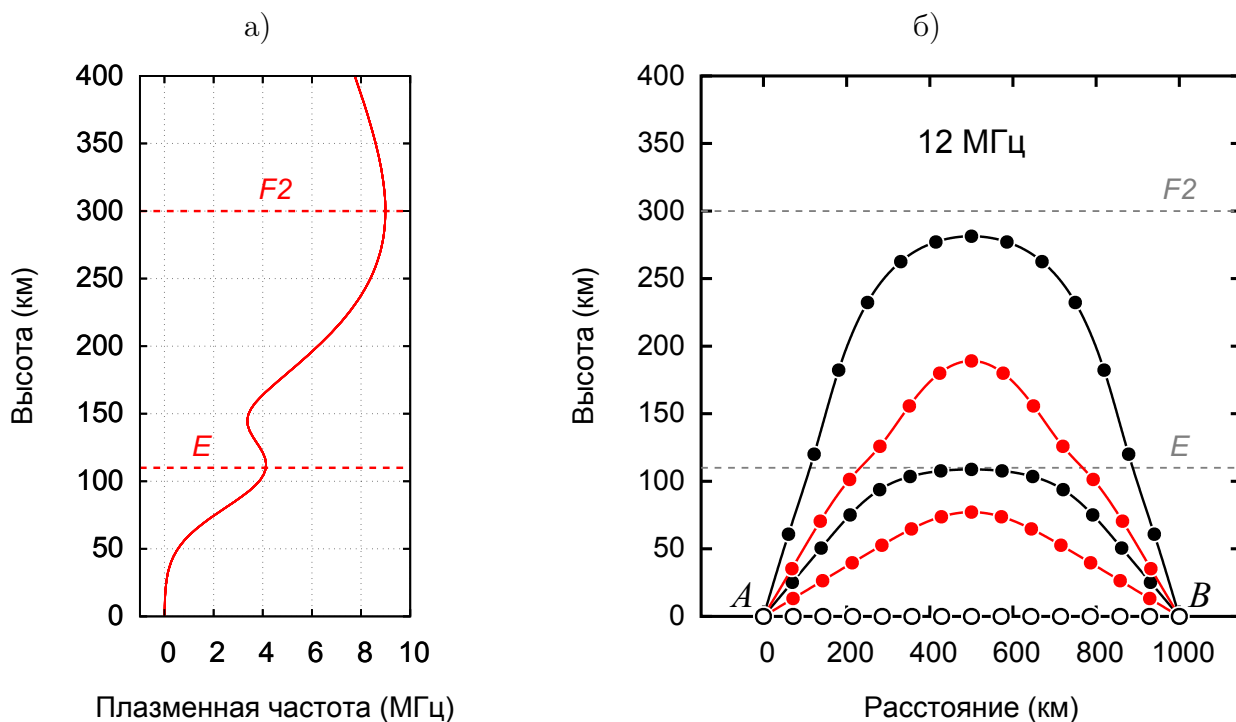


Рисунок 4.3 — Слева (а) представлен профиль плазменной частоты ионосферы, заданной по формуле (4.2); Справа (б) представлены лучевые траектории радиоволны с частотой 12 МГц для заданных граничных условий. Незакрашенными черными кружками показано начальное приближение луча, закрашенными черными и красными кружками — результат оптимизации соответственно верхних и нижних лучей методом обобщенной силы и глобальной оптимизацией, черными и красными сплошными линиями — численные решения методом пристрелки [63]. Серыми пунктирными линиями обозначены максимумы  $E$  и  $F2$  ионосферных слоев.

концентрации (см. формулу (4.2)) является гладкой функцией, что позволяет использовать метод обобщенной силы и глобальную оптимизацию (см. параграфы 3.1 – 3.3). Задав начальное приближение в виде цепочки точек количеством  $P = 13$  вдоль прямой линии, соединяющей граничные точки, применяются метод обобщенной силы и глобальная оптимизация для последовательного нахождения минимумов и седловых точек первого рода функционала фазового пути. В результате систематического поиска определено два верхних и два нижних луча, что соответствует лучевой конфигурации в диапазоне частот  $f_{cr1,2} < f < \text{МПЧ1} < \text{МПЧ2}$ . Найденные лучи сопоставлялись с результатами расчетов, полученными с использованием численной модели [63], основанной

на методе бихарактеристик, дополненной методом пристрелки. Как показано на рис. 4.3б, лучевые траектории, рассчитанные с использованием двух различных подходов, полностью согласуются.

Примеры лучевых траекторий, полученных с использованием вариационного подхода, для рабочих частот в диапазоне 6 – 16 МГц, а также соответствующие карты фазового пути представлены на рис. 4.4. Согласно результатам, полученным с помощью методики экспресс анализа для данной среды, каждое решение соответствует стационарной точке функционала фазового пути. На рис. 4.4 все верхние лучи соответствуют минимумам функционала фазового пути, а нижние — седловым точкам первого порядка. Для частоты 6 МГц, не превышающей плазменную частоту максимума  $E$  слоя, характерно наличие «запрещенной зоны» с высоты  $\approx 110$  км, где  $n^2 < 0$  (см. рис. 4.4а). В данном случае единственным решением является отраженный от  $E$  слоя нижний луч, который соответствует седловой точке функционала фазового пути. Для частоты 8 МГц, не превышающей плазменную частоту максимума  $F2$  слоя, характерно наличие «запрещенной зоны» с высоты  $\approx 220$  км (см. 4.4б)). В этом случае существуют один верхний луч и два нижних луча, соответствующие минимуму и седловым точкам функционала радиолуча. Для рабочих частот в 10 – 14 МГц из интервала  $f_{cr} < f < \text{МПЧ}$  карты фазового пути содержат четыре стационарные точки – два минимума и две седловые точки, соответствующие двум верхним и двум нижним лучам (см. рис. 4.4а – 4.4д). Аналогично результатам, представленным в предыдущем подпараграфе, при увеличении рабочей частоты наблюдается сближение стационарных точек. При достижении МПЧ соседние минимумы и седловые точки, а соответственно, верхние и нижние лучи сливаются. Для рабочей частоты, превышающей МПЧ, на картах фазового пути отсутствуют стационарные точки и радиосвязь между передатчиком и приемником исчезает (см. рис. 4.4е). Многолучевость на картах представлена в виде суперпозиций минимумов и седловых точек. Важно отметить как последовательный характер расположения, так и соотношение величин фазового пути каждого решения. На всех представленных картах глобальным минимумом является верхний луч  $F2$  слоя. Это объясняется тем, что функция показателя преломления, заданная формулой (2.11), в выражении для функционала фазового пути (2.3) имеет глобальный минимум на высоте максимума  $F2$  слоя и локальный минимум на высоте максимума  $E$  слоя. Следовательно, верхний луч,

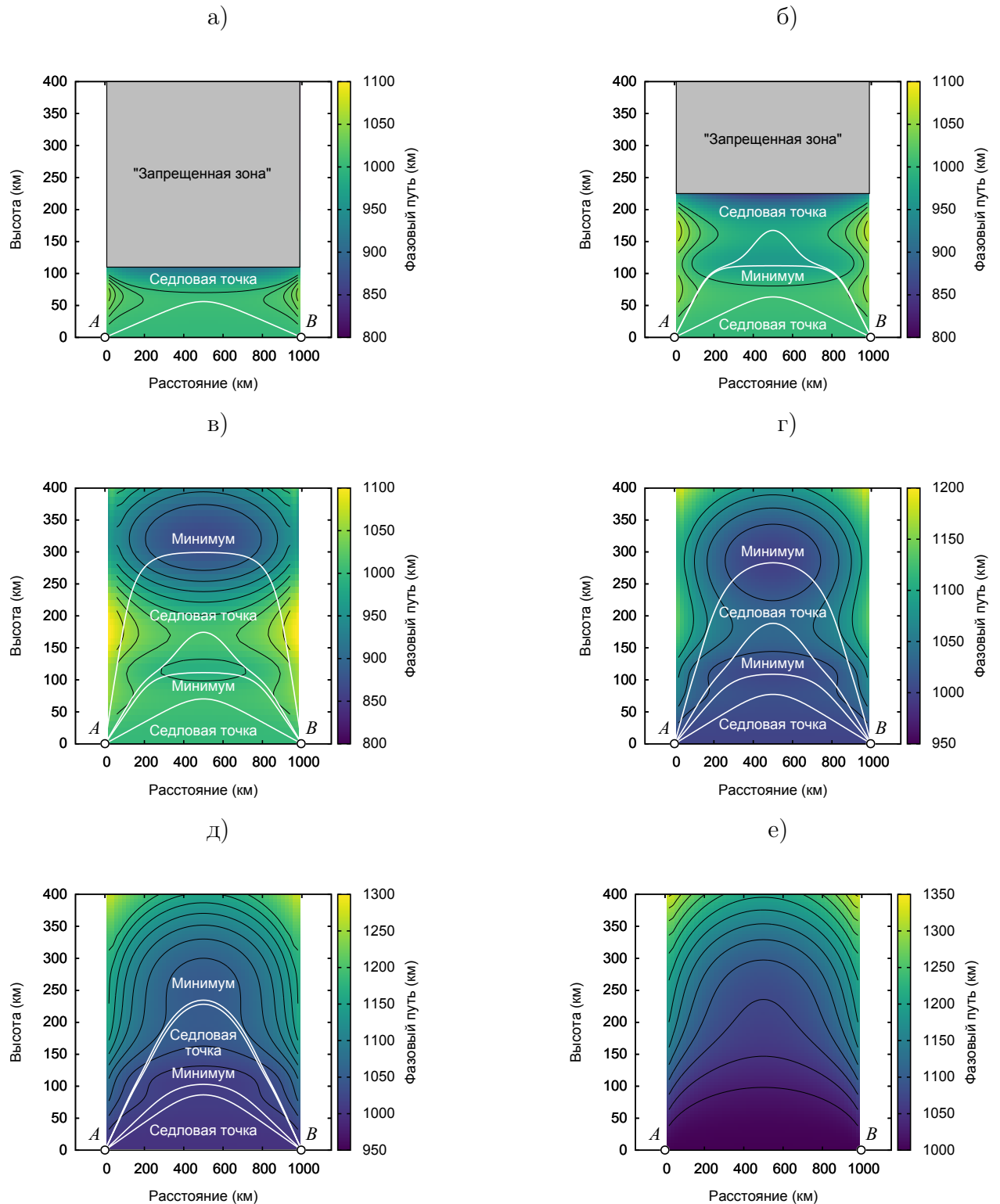


Рисунок 4.4 — Двумерные карты распределения фазового пути лучевых траекторий для диапазона частот 6 – 16 МГц: (а) — 6 МГц, (б) — 8 МГц, (в) — 10 МГц, (г) — 12 МГц, (д) — 14 МГц, (ж) — 16 МГц. Белыми сплошными линиями показаны решения граничной задачи (верхние и нижние лучи) в двухслойной модельной ионосфере (см. формулу (4.2)).

отраженный от  $E$  слоя, является локальным минимумом функционала (2.3). Соотношение длин фазовых путей нижних лучей меняется в рассматриваемом диапазоне частот. Вблизи критической частоты  $f_{cr}$  фазовый путь нижнего луча слоя  $F2$  меньше нижнего луча слоя  $E$ , однако, по мере увеличения рабочей частоты соотношение меняется в противоположную сторону. Полученные результаты согласуются с картами фазового пути для параболического слоя и демонстрируют фундаментальную разницу между верхними и нижними лучами.

Далее рассмотрим работу метода обобщенной силы и глобальной оптимизации в трехмерной ионосфере, используя аналогичную модель (см. формулу (4.2)). Для демонстрации работоспособности вариационного подхода при решении граничной задачи в трехмерной неоднородной среде в аналитическую модель ионосферы была включена локальная неоднородность на высоте  $F2$  слоя. Выражение для электронной концентрации  $N(\vec{r})$  с учетом неоднородности принимает следующий вид:

$$N(\vec{r}) = N_e(z)[1 - \Delta(\vec{r})]. \quad (4.3)$$

Здесь профиль электронной концентрации  $N_e(z)$  определяется согласно формуле (4.2) с аналогичными параметрами, а неоднородность описывается гауссовой функцией:

$$\Delta(\vec{r}) = \exp\left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}_d)^2}{\sigma^2}\right], \quad (4.4)$$

где  $\vec{r}_d = (500, 500, 300)$  км – радиус-вектор положения центра неоднородности и  $\sigma = 100$  км – параметр, характеризующий размеры неоднородности. Расчет лучевых траекторий выполнялся между положениями точек  $A$  и  $B$  с радиус-векторами  $\vec{r}_A = (0, 0, 0)$  км и  $\vec{r}_B = (1000, 1000, 0)$  км для рабочей частоты 10 МГц. В каждом локальном определении луча обобщенная сила итерационно сходилась к нулю с использованием метода проецирования скорости [108]. Процесс оптимизации считается завершенным, когда абсолютное значение силы, действующей на каждую точку траектории, не превышает  $10^{-9}$ . Результаты численных расчетов представлены на рис. 4.5 и в таблице 1. Приведем детальное описание работы метода обобщенной силы и глобальной оптимизации для данного примера.



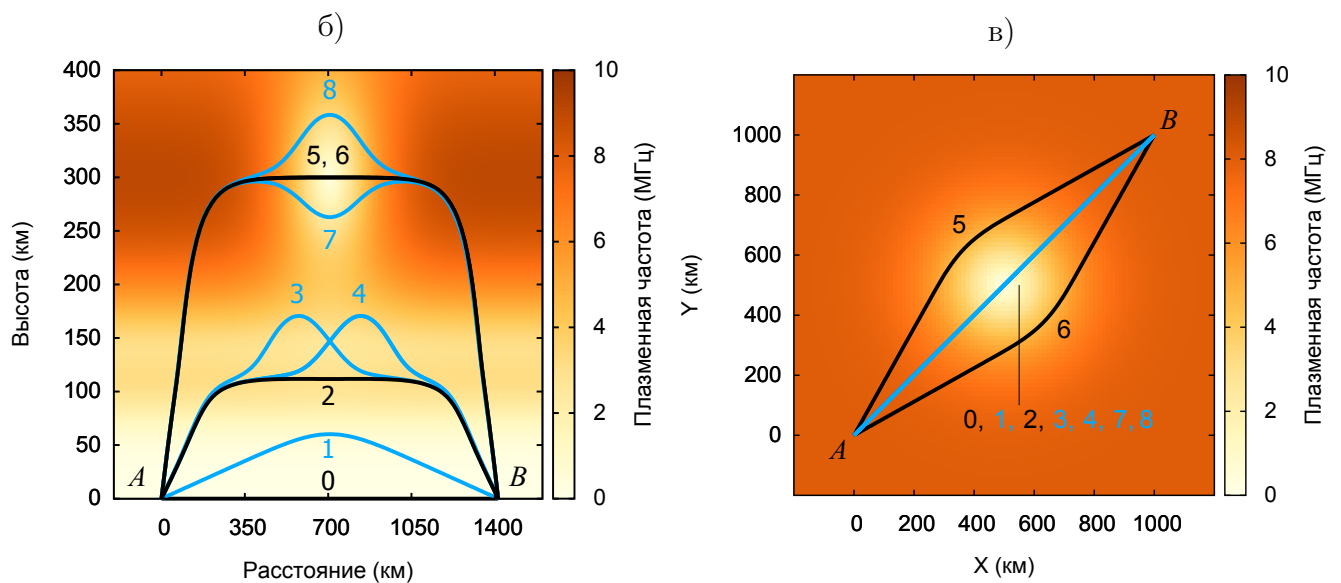
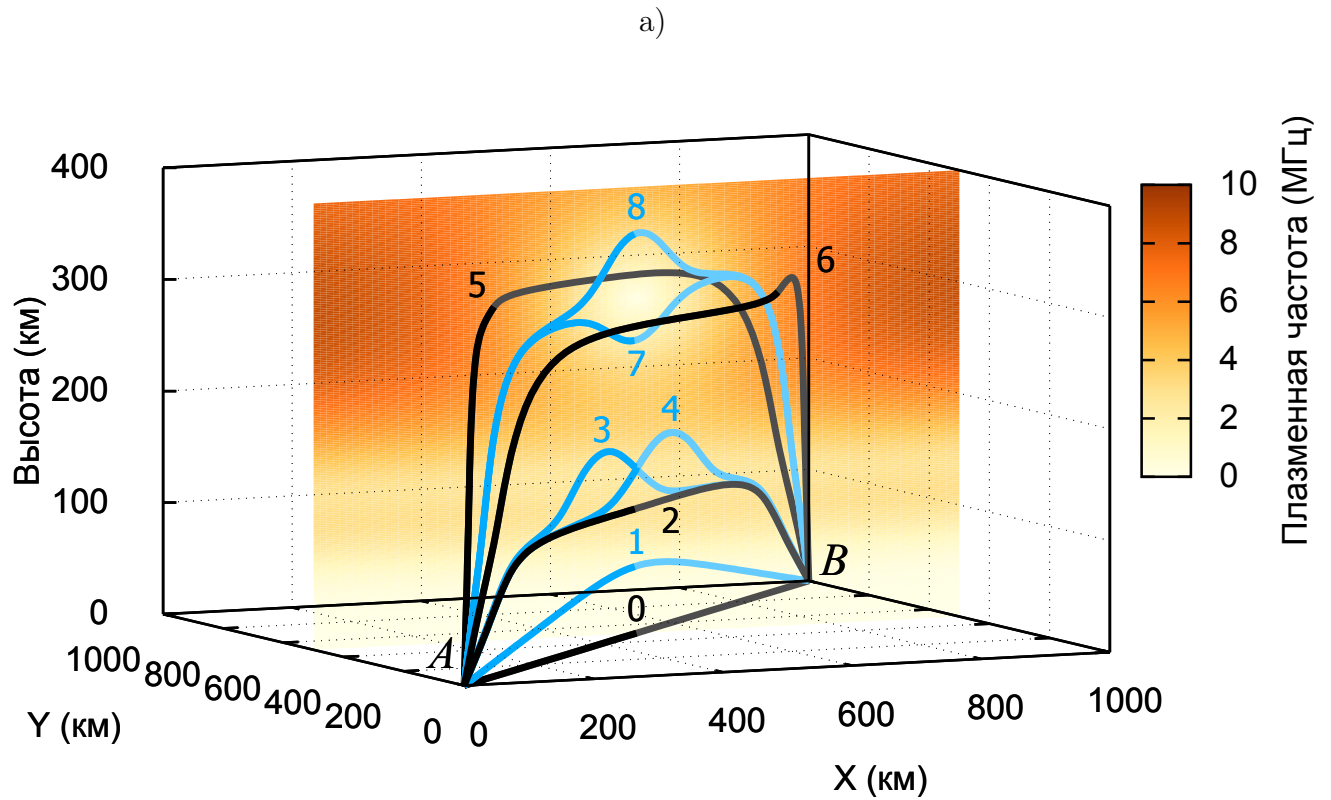


Рисунок 4.5 — Результаты расчетов лучевых траекторий методом обобщенной силы и глобальной оптимизацией для частоты 10 МГц в трехмерной неоднородной среде. Модель ионосферы задается по формуле (4.2). Черными линиями представлены верхние лучи, а синими линиями – нижние лучи. Рисунки (б) и (в) представляют собой проекции рисунка (а) сбоку и сверху соответственно.

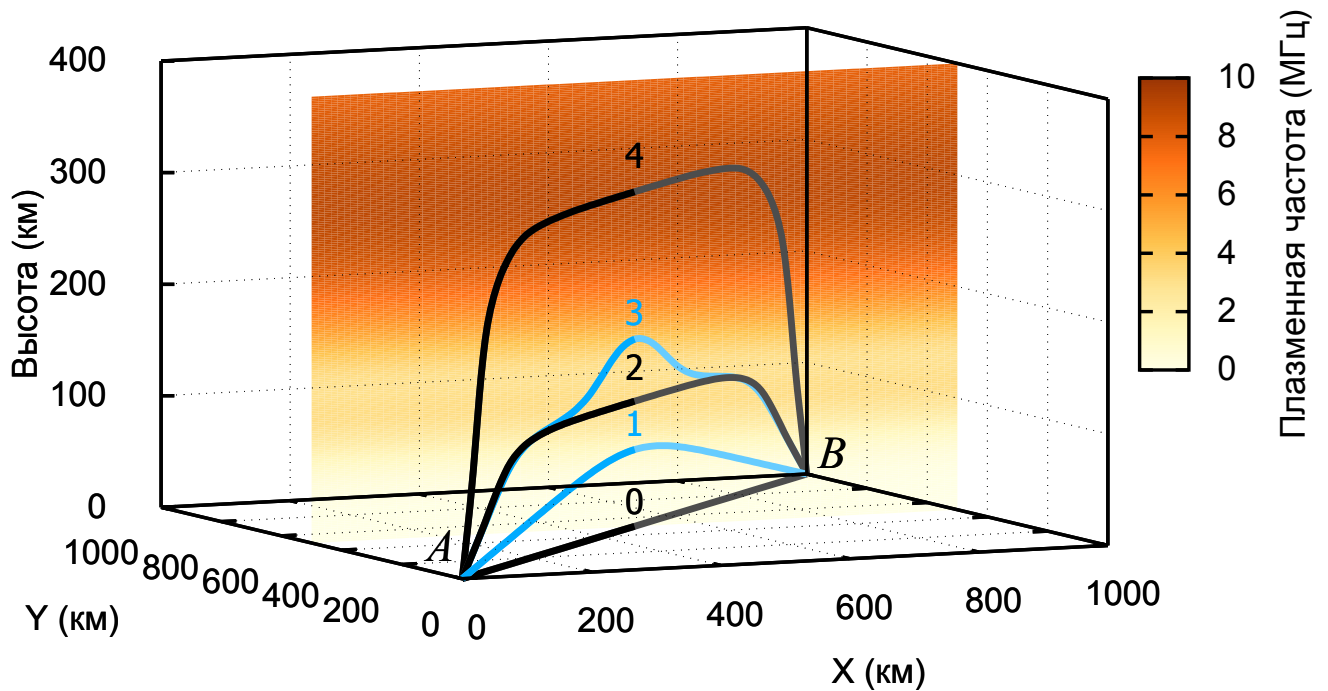


Рисунок 4.6 — Результаты расчетов лучевых траекторий методом обобщенной силы и глобальной оптимизации для частоты 10 МГц в двухслоевой среде без неоднородности. Черными линиями представлены верхние лучи, синими линиями – нижние лучи.

Инициализация метода глобальной оптимизации осуществляется заданием положений промежуточных точек траектории равномерно вдоль прямой линии, соединяющей точки  $A$  и  $B$ . Отметим, что в случае однородной среды, прямая линия является лучом, соответствующим минимуму фазового пути (луч 0 на рис. 4.5а и 4.5б). Стартуя с начального положения, производится несколько случайных смещений траектории с последующим поиском седловых точек методом минимальной моды. В этом случае определено одно решение: луч 1, отраженный от  $E$  слоя ионосферы (см. рис. 4.5а и 4.5б). После этого зададим небольшое смещение вдоль и против направления вектора минимальной моды. Последующее применение локальной минимизации позволяет либо вернуться к известному лучу 0, либо найти новый луч 2 — верхний луч, распространяющийся вдоль  $E$  слоя ионосферы и отраженный от него. Поиск седловых точек из окрестности верхнего луча 2 сходится к трем соседним седловым точкам, один из которых, луч 1, был определен в предыдущей оптимизации с луча 0. Лучи 3 и 4 являются нижними лучами, отраженными от  $F2$  слоя. Несмотря на то, что эти лучи лежат в одной вертикальной плоскости, проходящей через гранич-

Таблица 1 — Результаты расчетов радиолучей, представленных на рис. 4.5.

Номер луча	Тип луча	Число точек $N$	Фазовый путь $S$ , км	Угол места $\alpha$ , °	Азимут $\beta$ , °	Время расчета $t$ , с
1	нижний	19	1418.11	5.77	45	0.7
2	верхний	27	1364.27	25.46	45	0.2
3	нижний	31	1384.11	25.48	45	0.9
4	нижний	31	1384.11	25.49	45	0.9
5	верхний	41	1046.9	61.63	34.03	0.3
6	верхний	41	1046.9	61.63	55.97	0.3
7	нижний	37	1128.26	61.77	45	1.3
8	нижний	31	1125.01	61.83	45	1.1

ные точки  $A$  и  $B$ , формы этих решений асимметричны, вследствие воздействия ионосферной неоднородности. Вершины этих лучей смещены к концам траектории  $A$  (луч 3) и  $B$  (луч 4). В случае отсутствия ионосферной неоднородности, лучи 3 и 4 сливаются в один (см. рис. 4.6). Отметим, что лучи 2, 3 и 4 имеют близкие, но различные значения угла места (см. таблицу 1). Далее, стартуя с луча 3, малое смещение вдоль минимальной моды и последующая минимизация определяют новое решение - верхний луч 5, распространяющийся вдоль  $F2$  слоя. Повторив процесс оптимизации с луча 4, найден очередной верхний луч 6. Последняя пара верхних лучей демонстрируют трехмерный характер распространения радиоволны: лучи огибают ионосферную неоднородность по наиболее короткому фазовому пути и, как следствие, отклоняются от вертикальной плоскости распространения. Поиск седловых точек с начального приближения, заданного на верхнем луче 5, обнаруживает два новых луча: нижние лучи 7 и 8, преломляющиеся на ионосферной неоднородности. Аналогичный поиск с верхнего луча 6 не приводит к определению новых лучей. Процедура глобальной оптимизации окончена.

В результате восемь лучей было найдено процедурой систематического перехода от одного минимума к другому через седловые точки, из них три

верхних луча (лучи 2, 5 и 6) и пять нижних лучей (лучи 1, 3, 4, 7 и 8). Как результат, ионосферная неоднородность оказала значительное влияние на формирование лучевой структуры. В сравнении с невозмущенной средой (см. рис. 4.6) появляются четыре дополнительных луча. Причем два луча отклоняются от плоскости, проходящей через точки передатчика и приемника и вертикальной оси  $OZ$  (см. рис. 4.5а).

Представленный выше пример демонстрирует один из важнейших аспектов разрабатываемого вариационного метода, а именно, его применимость и эффективность использования для решения задач распространения радиоволн в трехмерно-неоднородной ионосфере. В частности, информация о характере экстремумов функционала фазового пути позволила построить глобальную процедуру поиска множества лучей, основной идеей которой является систематический поиск решений. При этом каждое найденное решение является отправной точкой для определения последующих лучей, что автоматически решает проблему подбора начальных приближений для каждого искомого луча.

## 4.2 Численное моделирование радиотрасс в модели IRI-2007. Сравнение результатов расчетов с методом пристрелки

Применим вариационный подход к расчету радиотрасс в среде, где электронная концентрация задается по модели IRI-2007 [84]. На рис. 4.7 показаны результаты расчета лучевых траекторий для радиоволны с частотой 12 МГц на трассе Хабаровск ( $47^\circ$  с.ш.,  $134^\circ$  в.д.) – Торы ( $51^\circ$  с.ш.,  $103^\circ$  в.д.) [112]. В данном случае распределение электронной концентрации соответствовало 01:00 UT 22 июня 2016 г. Поиск каждого луча алгоритмом глобальной оптимизации осуществлялся с числом точек  $P = 13$ , но при этом для увеличения точности количество точек дискретизации последовательно увеличивалась. В данном примере максимальное число точек составляло 41. Применение метода обобщенной силы и глобальной оптимизации позволило определить три верхних луча (лучи 1, 3, 5, отраженные от слоев  $E$ ,  $F1$  и  $F2$  как показано на рис. 4.7) и два нижних луча (лучи 2, 4, отраженные соответственно от слоев  $F1$  и  $F2$ , как показано на рис. 4.7). Выбранная рабочая частота 12 МГц близка к минимальной рабочей ча-

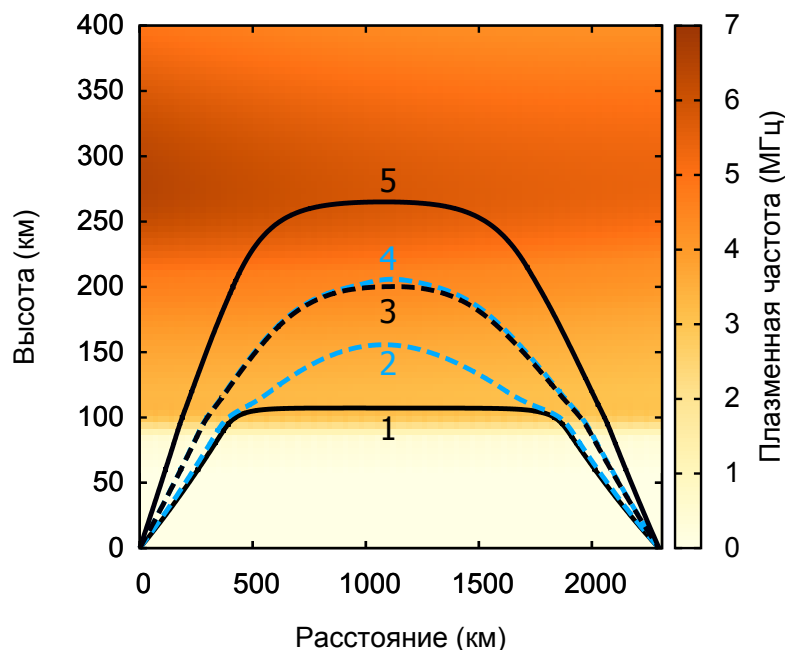


Рисунок 4.7 — Результаты расчетов, полученные с использованием алгоритма глобальной оптимизации на трассе Хабаровск ( $47^\circ$  с.ш.,  $134^\circ$  в.д.) – Торы ( $51^\circ$  с.ш.,  $103^\circ$  в.д.) в день летнего солнцестояния 22.06.2016. Электронная концентрация задается моделью IRI-2007. Рабочая частота равна 12 МГц. Лучи получены двумя различными подходами – вариационным методом и численным решением уравнения эйконала методом характеристик с дальнейшим применением алгоритмов трассировки и пристрелки. Верхние и нижние лучи представлены черными и синими линиями соответственно. Лучи, изображенные пунктирной линией представляют решения, не найденные методом пристрелки для трассировки с шагом по углу возвышения превышающим  $1^\circ$ . Для идентификации луча 4 требуется значение шага по углу менее  $0.1^\circ$ .

стоте ионосферного слоя  $F2$ , в результате лучевые траектории 3 (верхний луч, отраженный от  $F1$  слоя) и 4 (нижний луч, отраженный от  $F2$  слоя) практически сливаются (см. рис. 4.7). Близость данных решений не вызывает трудностей в их определении вариационным подходом.

Радиотрасса Хабаровск – Торы была также рассчитана традиционным подходом: трассировкой, осуществляемой на основе численных решений уравнения эйконала методом бихарактеристик, и дальнейшим применением метода пристрелки [63]. Подбор начальных условий для дальнейшей реализации пристрелки осуществлялся на основе использования стандартного метода трассировки лучей из п. Хабаровск и дальнейшей оценкой положений точек прихода радиолучей. В данном численном расчете угол излучения последовательно уве-

личивался в диапазоне от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  с некоторым заданным шагом  $\Delta\alpha$ . Искомый угол излучения считался изолированным в интервале от  $\alpha$  до  $\alpha + \Delta\alpha$  если луч, направленный под углом  $\alpha$ , перелетал (недолетал) желаемую точку приема (п. Торы), и соответственно луч, запущенный с углом  $\alpha + \Delta\alpha$ , недолетал до точки приема (перелетал ее). Далее, для каждого такого углового диапазона применялся метод пристрелки, что позволило определить луч, падающий в окрестность п. Торы с точностью 10 м. Полученные траектории полностью совпали с лучами, рассчитанными вариационным методом (см. рис. 4.7). Однако для определения всех пяти решений потребовалось задать достаточно мелкий угловой шаг  $\Delta\alpha \leq 0.1^\circ$  трассировки лучей. В случае задания углового шага трассировки  $0.5^\circ \leq \delta\alpha \leq 1^\circ$ , только лучи 1, 2, 3 и 5 были определены, а луч 4 оставался найденным. В случае трассировки лучей с угловым шагом  $\Delta\alpha \gtrsim 1^\circ$ , методом пристрелки удалось определять только два луча (1 и 5), при этом оставшиеся три решения не были найдены.

Данный пример показывает эффективность прямого вариационного метода в поиске множества решений граничной задачи. Показано, что определение лучей с близкими параметрами углов излучения (например, если рабочая частота близка к минимальной или максимальной применимой частоте) вызывает трудности у традиционного метода пристрелки. Отметим, что увеличение числа лучей при трассировке, необходимых для идентификации решений методом пристрелки, неизбежно приводит к росту вычислительных затрат. Кроме того, заранее неизвестен угол трассировки, позволяющий найти все лучи. Напротив, прямой вариационный метод и алгоритм глобальной оптимизации, нечувствительны к конфигурации и расположению лучей в пространстве. В частности, близость лучей не вызывает какого-либо видимого увеличения вычислительных затрат, и лучи могут быть надежно разрешены без необходимости какой-либо дополнительной настройки параметров расчета.

Рассмотрим другой пример поиска решений вариационным методом в неоднородной среде с электронной концентрацией заданной по модели IRI-2007 для радиотрассы Калининград ( $55^\circ$  с.ш.,  $20^\circ$  в.д.) – Стокгольм ( $59^\circ$  с.ш.,  $18^\circ$  в.д.) [109; 123]. Частота радиоволны составляла 8 МГц. Расчет радиотрассы выполнялся для момента времени 12:00 UT 22 июня 2014 г. На рис. 4.8 представлены результаты расчетов, полученные на основе метода обобщенной силы и глобальной оптимизации как для верхних, так и для нижних лучей. Поиск каждого

луча глобальной оптимизацией осуществлялся с числом точек  $P = 13$ , но при этом дискретизация луча последовательно увеличивалась до достижения некоторого заданного уровня точности фазового пути, равной длине радиоволны. В данном численном эксперименте максимальное число точек составляло 47. Применение глобальной оптимизации позволило определить два верхних луча и два нижних луча (см. рис. 4.8а). Для данного примера методом экспресс анализа была построена двумерная карта распределения фазового пути функционала (2.3). Результаты, представленные на рис. 4.8б показывают также соответствие верхних и нижних лучей двум типам стационарных точек: минимумам и седловым точкам первого порядка. Численный расчет гессианов соответствующих решений также подтвердил полученный результат: для верхних лучей собственные значения матрицы Гессе положительно определены, а для нижних лучей собственные значения матрицы Гессе не являются знакоопределенными (одно собственное значение отрицательное, все остальные - положительные). Особенностью рассмотренного примера является наличие горизонтального градиента плазменной частоты, что, тем не менее, не вызвало трудностей в исследовании функционала фазового пути методом экспресс анализа.

Далее рассмотрим применение вариационного подхода в неоднородной среде с учетом перемещающихся ионосферных возмущений (ПИВ) [123; 124]. Известно, что в периоды авроральной активности и различных атмосферных изменений генерируются перемещающиеся ионосферные возмущения различных масштабов [125; 126], которые оказывают значительное влияние на КВ радиосвязь.

Подробно опишем используемый в работе метод моделирования перемещающихся ионосферных возмущений. Для задания перемещающихся ионосферных возмущений в общем случае распределение электронной концентрации можно записать в виде:

$$N(\vec{r}) = N_0(\vec{r}) \cdot (1 + \Delta N_1(\vec{r})), \quad (4.5)$$

где  $N_0$  – базовое (фоновое) распределение электронной концентрации;  $\Delta N_1$  – некая неоднородная структура, задающая ПИВ. Фоновая ионосфера задавалась в виде значений плазменной частоты в узлах равномерной трехмерной сетки по модели IRI-2007. Далее, для расчета траекторий обеспечивается непрерывность плазменной частоты и ее производной. Этого можно достичь, используя

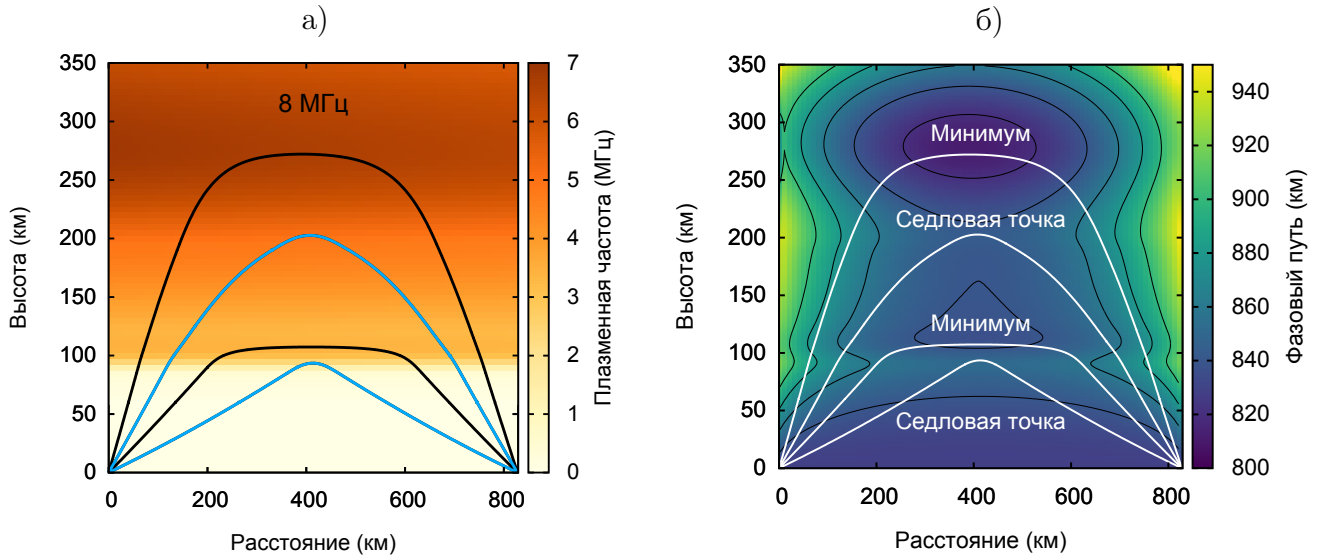


Рисунок 4.8 — Результаты расчетов, полученные с использованием метода обобщенной силы и глобальной оптимизации на трассе Калининград ( $55^\circ$  с.ш.,  $20^\circ$  в.д.) – Стокгольм ( $59^\circ$  с.ш.,  $18^\circ$  в.д.). Рабочая частота равна 8 МГц. В данном случае распределение электронной концентрации соответствовало 12:00 UT 22 июня 2014 г. Верхние и нижние лучи представлены черными и синими линиями соответственно слева (а) и белыми линиями справа (б). Лучевые траектории изображены на фоне распределения плазменной частоты (а) и карты распределения фазового пути (б), полученной процедурой экспресс анализа.

интерполяцию полученных модельных данных кубическим сплайном. Поэтому на полученной двумерной сетке определяется трехмерный кубический сплайн, который и используется для получения значений невозмущенного высотного профиля электронной концентрации  $N_0(\vec{r})$  в любой точке.

Неоднородность ионосферы и ее временная нестационарность, связанная с движением ПИВ, моделируются цугом нескольких бегущих монохроматических волн:

$$N(\vec{r}, t) = N_0(\vec{r}, t) \left[ 1 + \sum_{i=1}^M \delta_i \cdot \sin \left[ -\Omega_i t + \vec{P}_i \cdot \vec{r} + \Phi_{0i} \right] \right], \quad (4.6)$$

где  $M$  – число задаваемых ПИВ,  $N_0(\vec{r}, t)$  – пространственно-временное распределение электронной концентрации в невозмущенной ионосфере,  $\delta_i$  – относительная амплитуда  $i$ -ой гармоники ПИВ с частотой  $\Omega_i$ ,  $\vec{P}_i$  – волновой вектор ПИВ,  $\Phi_{0i}$  – начальная фаза  $i$ -ой гармоники.



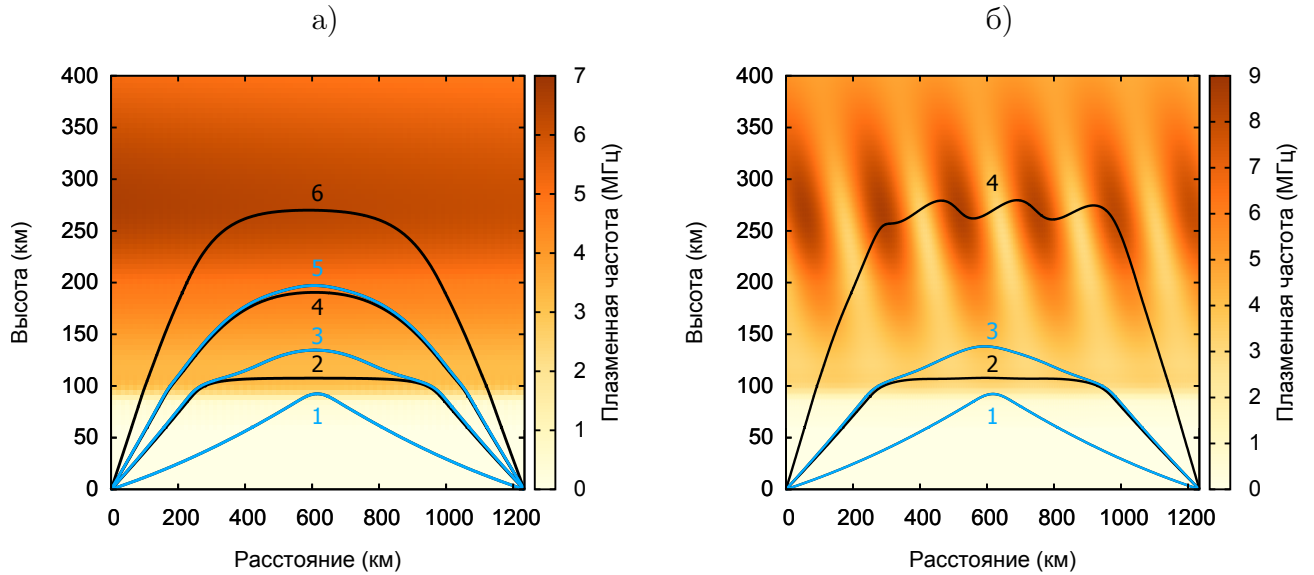


Рисунок 4.9 — Результаты расчета радиотрассы с частотой 9 МГц методом обобщенной силы и глобальной оптимизацией между передающей (г. Калининград;  $55^\circ$  с.ш.,  $20^\circ$  в.д.) и приемными станциями (г. Тромсе;  $66^\circ$  с.ш.,  $19^\circ$  в.д.) (черные линии) на фоне распределения плазменной частоты по модели IRI-2007 без учета перемещающихся ионосферных возмущений (а) и при задании ПИВ на высотах  $F^2$  слоя (б).

В общем случае каждый из  $M$  ПИВ задается пятью параметрами:  $\delta_i$  – относительная амплитуда ПИВ;  $T_i$  – периодом ПИВ;  $\Lambda_i$  – длиной волны ПИВ;  $\Theta_i$  – углом наклона ПИВ относительно поверхности Земли;  $\Psi_i$  – углом распространения ПИВ относительно оси  $Ox$  используемой системы координат. Тогда формула (4.6) примет вид:

$$N(\vec{r}, t) = N_0(\vec{r}, t) \left[ 1 + \sum_{i=1}^M \delta_i \cdot \sin \left[ -\frac{2\pi}{T_i} t + \frac{2\pi}{\Lambda_i} \cdot x \cdot \cos \Theta_i \cos \Psi_i + \frac{2\pi}{\Lambda_i} \cdot y \cdot \cos \Theta_i \sin \Psi_i + \frac{2\pi}{\Lambda_i} \cdot z \cdot \sin \Theta_i + \Phi_{0i} \right] \right]. \quad (4.7)$$

Здесь мы предполагаем, что ПИВ распространяется вдоль трассы, что выглядит вполне обоснованным, поскольку рассматривается трасса между высокоширотной и среднеширотной станциями.

Рассмотрим возможности поиска решений вариационным методом в неоднородной среде с электронной концентрацией заданной по модели IRI-2007 и

с учетом перемещающихся ионосферных возмущений на примере радиотрассы Калининград ( $55^\circ$  с.ш.,  $20^\circ$  в.д.) – Тромсе ( $66^\circ$  с.ш.,  $19^\circ$  в.д.) с частотой 9 МГц для полуденных летних условий в период средней солнечной активности. Моделирование ПИВ осуществлялось с заданным набором параметров:  $M = 1$ ,  $\delta_{10} = 0.8$ ,  $Xm_1 = 600$  км,  $Zm_1 = 250$  км,  $Lx_1 = 1600$  км,  $Lz_1 = 100$  км,  $\Lambda_1 = 200$  км,  $\Theta_1 = 30^\circ$ ,  $\Psi_{01} = 30^\circ$ .

На рис. 4.9 представлены результаты расчетов, полученные на основе метода обобщенной силы и алгоритма глобальной оптимизации, как для верхних, так и для нижних лучей в среде без ПИВов (рис. 4.9а) и с их наличием (рис. 4.9б). Аналогично с представленным ранее примером, поиск каждого луча алгоритмом глобальной оптимизации осуществлялся с числом точек  $P = 13$ , но при этом дискретизация луча последовательно увеличивалась до достижения приемлемого уровня точности фазового пути решений, равной длине радиоволны. В данном численном эксперименте максимальное число точек составляло 55. В невозмущенной среде применение глобальной оптимизации позволило определить три верхних луча и три нижних луча (см. рис. 4.9а). Отметим, что верхний и нижний лучи с высотами отражений  $\approx 180$  км почти сливаются (см. рис. 4.9). Как и в представленном выше примере, вариационный подход успешно разрешил эти два луча. В среде с наличием ПИВ вариационный метод определил четыре лучевые траектории: два нижних и два верхних луча, отраженных от  $E$  и  $F2$  слоев.

Стоит отметить, что наличие ионосферных возмущений приводит к значительным изменениям формы радиолучей. На рис. 4.9б видно, как луч, отраженный на высотах  $F2$  слоя, изгибается на перемещающихся ионосферных возмущениях. Вследствие этого траектория радиолуча имеет волнообразный вид. Таким образом, форма траектории лучей не является трудностью для нахождения решений на основе вариационного метода. Результаты расчетов, полученные вариационным методом и методом пристрелки, для рассматриваемых случаев показывают полное согласие. Как результат, прямой вариационный метод успешно применяется для расчета радиотрасс КВ-диапазона в среде с неоднородным распределением электронной концентрации.

### 4.3 Синтезирование дистанционно-частотных характеристик наклонного зондирования

Одно из главных направлений прикладного использования методик расчета лучевых траекторий является моделирование дистанционно-частотных характеристик (в случае расчета амплитудных характеристик – ионограмм) наклонного зондирования. В настоящее время модельные дистанционно-частотные характеристики (ДЧХ) являются важным инструментом верификации ионосферных моделей. С другой стороны, модельные и экспериментальные ДЧХ (ионограммы) наклонного зондирования могут использоваться для мониторинга состояния ионосферы в ненаселенных областях. Поэтому совершенствование методов моделирования ионосферы и расчета радиотрасс является актуальной задачей. В данном разделе представлены экспериментальные ионограммы и модельные ДЧХ наклонного зондирования для среднеширотной трассы Хабаровск – Торы [112]. Экспериментальные данные были получены 8 января 2016 г. в 17:11 UT, 9 января 2016 г. в 5:31 UT, 4 марта 2016 г. в 17:36 UT, 28 марта 2016 г. в 21:51 UT с использованием сети многофункциональных ионозондов, генерирующие непрерывные сигналы со сложной фазовой модуляцией. Диапазон рабочих частот приемо-передающих устройств составляет 4 – 30 МГц, частота развертки составляет 500 кГц/с, а мощность излучения варьируется в диапазоне от 15 Вт до 100 Вт. Ионозонды на станциях Хабаровск и Торы являются частью сети ЛЧМ радиозондирования, созданной Институтом солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук (ИСЗФ СО РАН). Сеть ЛЧМ-ионозондов ИСЗФ СО РАН охватывает Восточно-Сибирскую часть России и работает в непрерывном режиме с временным разрешением 5 минут, позволяющим измерять кратковременные ионосферные процессы, такие как перемещающиеся ионосферные возмущения средних масштабов [12; 127].

Моделирование ДЧХ выполнялось с использованием лучевого метода, представленного в данной работе. Для каждой лучевой траектории, найденной вариационным методом, рассчитывался групповой путь в зависимости от выбранной частоты (см. рис. 4.10) [83; 86]. На рис. 4.10 дистанция представлена в виде задержки радиосигнала при распространении от передатчика до приемника. Полученные модельные ДЧХ качественным образом описывают данные

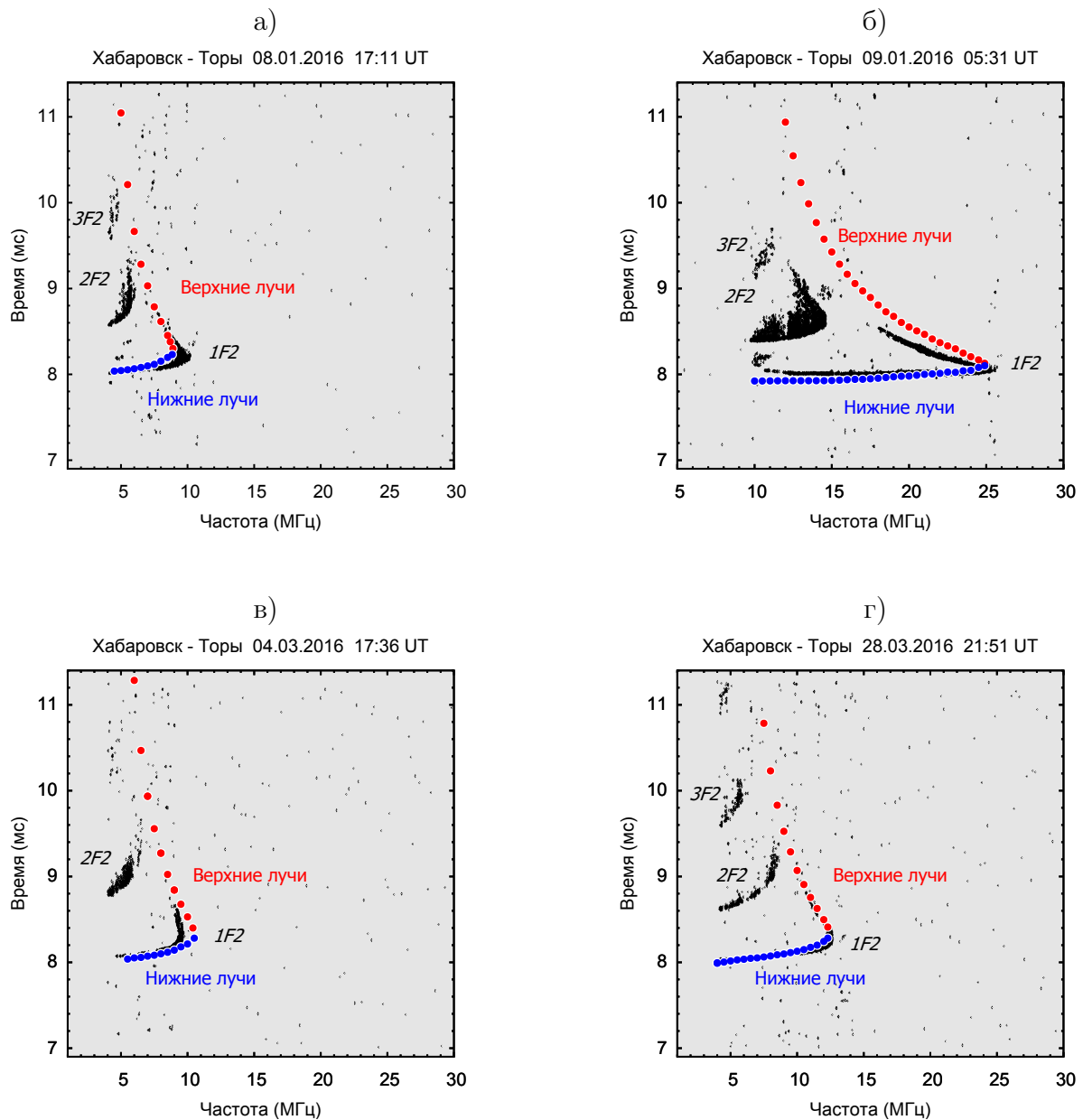


Рисунок 4.10 — Дистанционно-частотные характеристики наклонного зондирования на трассе Хабаровск – Торы за 8 января 2016 года 17:11 UT (а), 9 января 2016 года в 5:31 UT (б), 4 марта 2016 года в 17:36 UT (в) и 28 марта 2016 года 21:51 UT (г). Дистанция представлена в виде задержки радиосигнала. Данные наблюдений показаны черными точками. Результаты, полученные с использованием вариационного метода и модели IRI-2007, показаны цветными кружками. Красные и синие кружки обозначают следы односкачковых верхних и нижних лучей соответственно. Метки «1F2», «2F2» и «3F2» указывают на следы лучей с одним двумя или тремя скачками соответственно, отраженных от ионосферного слоя  $F_2$ .

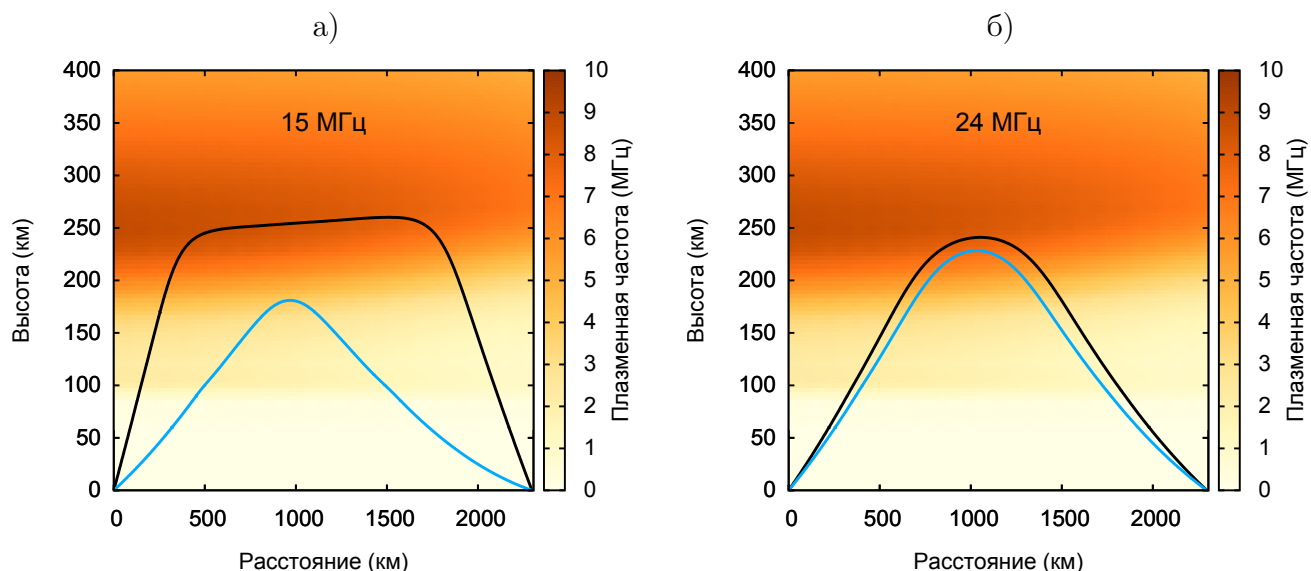


Рисунок 4.11 — Результаты численных расчетов вариационным методом радиотрассы Хабаровск – Торы в момент времени 5:31 UT 9 января 2016 года для рабочих частот 15 МГц (а) и 24 МГц (б). Электронная концентрация задается моделью IRI-2007. Верхние и нижние лучи показаны черными и синими линиями соответственно.

наблюдений, а в некоторых случаях наблюдается и количественное согласие. В представленных примерах лучшее согласие наблюдается для следов нижних лучей, траектории которых будут испытывать незначительные изменения в случае учета внешнего магнитного поля [73]. Верхние лучи, напротив, испытывают значительное изменение траекторий при учете анизотропии, что объясняет различие в модельных расчетах и данных наблюдений (см. рис. 4.10). Количественное различие во временах группового запаздывания и значениях максимально применимых частот объясняется выбором модели IRI-2007, которая представляет собой климатическую модель ионосферы и не описывает погодных вариаций основных параметров ионосферной плазмы, особенно в сильно изменчивой субавроральной области [128; 129]. Дополнительные следы отражений на экспериментальных ионограммах свидетельствуют о наличии двух- и трехскачковым мод. Воспроизведение многоскачковых радиотрасс прямым вариационным методом представляет собой предмет дальнейших исследований.

Моделирование ДЧХ наклонного зондирования прямым вариационным методом показывает широкие возможности его применения. Метод глобальной оптимизации, позволяющий находить радиолучи без априорной информации о

числе решений и без подбора начальных приближений, показывает эффективность для построения ДЧХ.

Хотя представленные в этом разделе ДЧХ, вероятно, слишком просты, чтобы по-настоящему продемонстрировать эффективность вариационного метода, они подтверждают применимость метода обобщенной силы к прикладным задачам распространения радиоволн. ДЧХ также иллюстрируют интерпретацию верхних и нижних лучей в терминах минимумов и седловых точек функционала фазового пути. Когда рабочая частота значительно отличается от МПЧ, минимум и седловая точки находятся далеко друг от друга, и соответствующие верхние и нижние лучи, а также их следы на ДЧХ хорошо разделены (см. рис. 4.10б и соответствующие конфигурации лучей для  $f = 15$  МГц на рис. 4.10б). При приближении рабочей частоты к МПЧ стационарные точки движутся навстречу друг другу, сливаются и в конечном итоге исчезают (см. рис. 4.10б). Эта интерпретация согласуется с общими знаниями о ионосферном распространении радиоволн, но также дает ценную информацию о природе верхних и нижних лучей. Установленный факт о типе экстремумов верхних и нижних лучей лежит в основе метода глобальной оптимизации лучей, представленного в данной работе.

#### 4.4 Выводы

В данной главе было представлено практическое применение метода обобщенной силы и алгоритма глобальной оптимизации для поиска лучевых траекторий радиоволн в различных средах: аналитической модели параболического слоя электронной концентрации, аналитической двухслоевой модели и международной справочной модели IRI–2007. Были получены следующие результаты:

- Численные расчеты методом экспресс анализа для всех представленных моделей ионосферы показали соответствие фазовых путей верхних и нижних лучей стационарным точкам двух типов: минимумы и седловые точки первого порядка;

- Сравнение лучевых траекторий, полученных вариационным методом, с известными аналитическими и численными решениями показали полное согласие;
- Численные расчеты лучевых траекторий выполнялись во всем диапазоне частот коротких волн. Показана устойчивость метода, в том числе в диапазоне частот  $f < f_{cr}$ , характеризующимся наличием «запрещенной зоны». В диапазоне частот  $f_{cr} < f < \text{МПЧ}$  метод устойчиво определяет пары верхних и нижних лучей для каждого ионосферного слоя.
- Показано преимущество использования вариационного метода в разрешении лучей с близкими значениями углов излучения по сравнению с методом пристрелки.
- Глобальная оптимизация была применена в трехмерной ионосфере с наличием неоднородностей. Главное преимущество глобальной оптимизации заключается в поиске множества решений в условиях многолучевости.
- Применение метода обобщенной силы и алгоритма глобальной оптимизации позволило создать новый инструмент моделирования ДЧХ наклонного зондирования. Сравнение модельных ДЧХ и экспериментальных ионограмм показало качественное и количественное согласие.

Таким образом, в ходе численных экспериментов была успешно выполнена апробация метода обобщенной силы и алгоритма глобальной оптимизации.

## Заключение

Основные результаты диссертационной работы представлены ниже.

1. В ходе выполнения диссертационной работы создан новый метод расчета лучевых траекторий распространения коротких радиоволн в ионосфере, с заданными положениями передатчика и приемника. В основе метода лежит основополагающий закон геометрической оптики – принцип Ферма, согласно которому фазовый (оптической путь) луча принимает стационарное значение. Метод представляет собой вариационный подход к расчету лучей, основанный на прямой оптимизации функционала фазового пути, без необходимости решения вариационного уравнения.
2. Проведено численное исследование стационарных значений функционала фазового пути радиолуча. Полученные результаты позволили определить два основных типа лучевых траекторий краевой задачи: минимумы и седловые точки.
3. Реализован метод обобщенной силы – оптимизационный метод, позволяющий проводить избирательный поиск решений граничной задачи. Минимумы и седловые точки, соответствующие искомым лучевым траекториям, могут быть найдены в результате одной и той же процедуры оптимизации под управлением обобщенной силы, формулировка которой зависит от типа искомого решения.
4. Разработан и реализован метод глобальной оптимизации, работа которого основана на систематическом поиске лучевых траекторий с заданными граничными условиями. Предложенный вариант глобальной оптимизации исключает проблему задания начальных приближений посредством последовательного поиска лучей и позволяет находить множество лучевых траекторий радиотрассы.
5. Проведено численное моделирование радиотрасс в трехмерной неоднородной изотропной среде с использованием метода обобщенной силы и алгоритма глобальной оптимизации. Исследованы возможности использования предложенных методов для решения краевой задачи с учетом многолучевого распространения. Показано, что вариационный подход



- позволяет эффективно решать граничную задачу о расчете лучевых траекторий без априорной информации о лучевом семействе.
6. Проведено сравнение вариационного подхода и метода пристрелки в среде, электронная концентрация которой задавалась по модели IRI-2007. Показаны преимущества использования вариационного подхода.
  7. На основе метода обобщенной силы и алгоритма глобальной оптимизации реализован комплекс программ для численного моделирования ионограмм наклонного зондирования. Проведена верификация разработанного комплекса программ на основе сравнения численных результатов и экспериментальных ионограмм наклонного зондирования.

Таким образом, в ходе выполнения диссертационной работы был создан и развит новый вариационный подход к расчету лучевых траекторий с заданными граничными условиями. Метод обобщенной силы и алгоритм глобальной оптимизации позволили реализовать новый инструмент численного моделирования лучевых траекторий коротких радиоволн в ионосфере, успешно апробированный в различных модельных средах.

## Список сокращений и условных обозначений

**КВ** – Короткие волны

**МПЧ** – Максимально применимая частота

**ГСМ ТИП** – Глобальная самосогласованная модель термосферы, ионосферы и протоносферы

**БФУ им. И. Канта** – Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта

**ИЗМИРАН** – Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской академии наук

**IRI** – International Reference Ionosphere, международная справочная модель ионосферы

**ПИВ** – Перемещающееся ионосферное возмущение

**ЛЧМ** – Линейная частотная модуляция

**ИСЗФ СО РАН** – Институт солнечно-земной физики Сибирского отделения Российской академии наук

**ДЧХ** – Дистанционно-частотная характеристика

## Список литературы

1. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. — с. 684.
2. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. — М.: Наука, 1980. — с. 304.
3. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Издательство Московского университета, 1965. — с. 312.
4. *Маслов В. П.* Операторные методы (введение в функ. анализ). — М.: Наука, 1973. — с. 544.
5. *Белов В. В., Доброхотов С. Ю.* Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // Теоретическая и математическая физика. — 1992. — т. 92, № 2. — с. 215—254.
6. Новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и каустик в двумерных квазиклассических асимптотиках / С. Ю. Доброхотов [и др.] // Теоретическая и математическая физика. — 2013. — т. 177, № 3. — с. 355—386.
7. Квазиклассическое приближение и канонический оператор Маслова для нерелятивистских уравнений квантовой механики в нанотрубках / В. В. Белов [и др.] // Доклады Академии наук. т. 393. — 2003. — с. 460—464.
8. Описание распространения волн цунами на основе канонического оператора Маслова / С. Ю. Доброхотов [и др.] // Доклады Академии наук. т. 409. — 2006. — с. 171—175.
9. *Доброхотов С. Ю., Макракис Г., Назайкинский В. Е.* Канонический оператор Маслова, одна формула Хёрмандера и локализация решения Берри–Балажа в теории волновых пучков // Теоретическая и математическая физика. — 2014. — т. 180, № 2. — с. 162—188.
10. *Лукин Д. С., Палкин Е. А.* Численный канонический метод в задачах дифракции и распространения электромагнитных волн в неоднородных средах. — М.: МФТИ, 1982. — с. 159.

11. *Ипатов Е. Б., Лукин Д. С., Палкин Е. А.* Численная реализация метода канонического оператора Маслова в задачах распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 1990. — т. 33, № 5. — с. 562—573.
12. *Куркин В. И., Орлов И. И., Попов В. Н.* Метод нормальных волн в проблеме коротковолновой радиосвязи. — М.: Наука, 1981. — с. 124.
13. Моделирование декаметрового радиоканала на основе метода нормальных волн / В. И. Алтынцева [и др.] // Техника средств связи. Серия СС. — М.: Экос. — 1987. — № 5. — с. 28—34.
14. *Пономарчук С. Н., Ильин Н. В., Пензин М. С.* Модель распространения радиоволн в диапазоне частот 1-10 МГц на основе метода нормальных волн // Солнечно-земная физика. — 2014. — № 25. — с. 33—39.
15. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. — 1978. — с. 464.
16. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973. — с. 720.
17. *Кунницын В. Е., Терещенко Е. Д.* Томография ионосферы. — М.: Наука, 1991. — с. 176.
18. *Воробьев В. В.* Статистические свойства одномерного обращения волнового поля, дифрагированного на двумерном фазовом экране // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 2000. — т. 43, № 3. — с. 234—242.
19. *Kravtsov Y. A., Tinin M. V.* Representation of a wave field in a randomly inhomogeneous medium in the form of the double-weighted Fourier transform // Radio Science. — 2000. — т. 35, № 6. — с. 1315—1322.
20. *Тинин М. В., Книжнин С. И.* Устранение влияния многолучевого распространения сигнала в плавно неоднородной среде // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 2013. — т. 56, № 7. — с. 458—467.
21. *Gherm V. E., Zernov N. N.* Scattering function of the fluctuating ionosphere in the HF band // Radio Science. — 1998. — т. 33, № 4. — с. 1019—1033.
22. *Gherm V. E., Zernov N. N., Strangeways H. J.* HF propagation in a wideband ionospheric fluctuating reflection channel: Physically based software simulator of the channel // Radio Science. — 2005. — т. 40, № 1. — с. 1—15.

23. *Zernov N. N., Gherm V. E.* Strong scintillation of GNSS signals in the inhomogeneous ionosphere: 1. Theoretical background // *Radio Science*. — 2015. — т. 50, № 2. — с. 153—167.
24. *Gherm V. E., Zernov N. N.* Strong scintillation of GNSS signals in the inhomogeneous ionosphere: 2. Simulator of transionospheric channel // *Radio Science*. — 2015. — т. 50, № 2. — с. 168—176.
25. *Дебай П.* Полярные молекулы. — Москва-Ленинград: ГНТИ, 1931. — с. 247.
26. Reconstruction of three-dimensional velocity fields and other parameters by acoustic ray tracing / S. A. Johnson [и др.] // *Ultrason Symp, Proc.* — IEEE (75 CHO 994-4SU). 1975. — с. 46—51.
27. *Porter M. B., Bucker H. P.* Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 1987. — т. 82, № 4. — с. 1349—1359.
28. Ocean acoustical ray-tracing: Software Ray : тех. отч. / J. B. Bowlin [и др.] ; Woods Hole Oceanographic Institution. — 1992.
29. *Satake K.* Effects of bathymetry on tsunami propagation: Application of ray tracing to tsunamis // *Pure and Applied Geophysics*. — 1988. — т. 126, № 1. — с. 27—36.
30. Ray tracing for dispersive tsunamis and source amplitude estimation based on Green's law: application to the 2015 volcanic tsunami earthquake near Torishima, south of Japan / O. Sandanbata [и др.] // *Pure and Applied Geophysics*. — 2018. — т. 175, № 4. — с. 1371—1385.
31. *Woods M. T., Okal E. A.* Effect of variable bathymetry on the amplitude of teleseismic tsunamis: A ray-tracing experiment // *Geophysical Research Letters*. — 1987. — т. 14, № 7. — с. 765—768.
32. *Um J., Thurber C.* A fast algorithm for two-point seismic ray tracing // *Bulletin of the Seismological Society of America*. — 1987. — т. 77, № 3. — с. 972—986.
33. *Jacob K. H.* Three-dimensional seismic ray tracing in a laterally heterogeneous spherical earth // *Journal of Geophysical Research*. — 1970. — т. 75, № 32. — с. 6675—6689.

34. *Rawlinson N., Sambridge M., Hauser J.* Multipathing, reciprocal traveltimes fields and raylets // *Geophysical Journal International*. — 2010. — т. 181, № 2. — с. 1077—1092.
35. *Hauser J., Sambridge M., Rawlinson N.* Multiarrival wavefront tracking and its applications // *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*. — 2008. — т. 9, № 11.
36. *Andersen A. H.* A ray tracing approach to restoration and resolution enhancement in experimental ultrasound tomography // *Ultrasonic imaging*. — 1990. — т. 12, № 4. — с. 268—291.
37. *Лукин Д. С., Спиридонов Ю. Г.* Применение метода характеристик для численного решения задач распространения радиоволн в неоднородной и нелинейной среде // *Радиотехника и электроника*. — 1969. — т. 14, № 9. — с. 1673—1677.
38. *Крашенинников И. В., Егоров И. Б., Павлова Н. М.* Эффективность прогнозирования прохождения радиоволн в ионосфере на основе ионосферной модели IRI-2001 // *Геомагнетизм и аэрономия*. — 2008. — т. 48, № 4. — с. 526—533.
39. Влияние внезапного стратосферного потепления в январе 2009 г. на распространение коротких радиоволн в экваториальной ионосфере / Д. С. Котова [и др.] // *Солнечно-земная физика*. — 2016. — т. 2, № 4. — с. 63—75.
40. *Вертоградов Г. Г., Урядов В. П., Вертоградов В. Г.* Наклонное зондирование и моделирование ионосферного коротковолнового канала // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. — 2005. — т. 48, № 6. — с. 455—471.
41. Интерпретация экспериментальных данных распространения коротких радиоволн на трассе Санкт-Петербург – арх. Шпицберген / М. Ю. Андреев [и др.] // *Геомагнетизм и аэрономия*. — 2007. — т. 47, № 4. — с. 534—542.
42. Теория катастроф и её приложения к описанию фокусировки, дифракции и распространения волновых полей / А. С. Крюковский [и др.] // *Труды*

- Московского физико-технического института. — 2009. — т. 1, № 2. — с. 54—71.
43. *Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А.* Равномерные асимптотики интегралов от быстроосциллирующих функций с вырожденными седловыми точками: Препринт. — 1984.
44. *Ипатов Е. Б., Лукин Д. С., Палкин Е. А.* Численные методы расчёта специальных функций волновых катастроф // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1985. — т. 25, № 2. — с. 224—236.
45. *Крюковский А. С.* Равномерная асимптотическая теория краевых и угловых волновых катастроф: монография. — М.: РосНОУ, 2013. — с. 368.
46. *Качалов А. П., Попов М. М.* Применение метода суммирования гауссовых пучков для расчета высокочастотных волновых полей // Доклады Академии наук. т. 258. — Российская академия наук. 1981. — с. 1097—1100.
47. *Крюковский А. С., Лукин Д. С., Палкин Е. А.* Численное сравнение двух асимптотических методов решение задач дифракции волн в плавно неоднородных средах // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 1986. — т. 29, № 1. — с. 79—88.
48. *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е.* Асимптотики волновых и вихревых локализованных решений линеаризованных уравнений мелкой воды // Актуальные проблемы механики. 50 лет Институту проблем механики им. АЮ Ишлинского РАН. — 2015. — с. 98—139.
49. *Казанцев А. Н., Лукин Д. С., Спиридонов Ю. Г.* Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере // Космические исследования. — 1967. — т. 5, № 4. — с. 593—600.
50. *Котова Д. С.* Исследование формирования лучевых траекторий и поглощения коротких радиоволн в ионосфере во время геомагнитных бурь [текст] : дис. . . . канд. физ.- мат. наук : 01.04.03 / Котова Д. С. — Иркутск, 2015. — 140 с.
51. Распространение радиоволн / О. И. Яковлев [и др.]. — М.: ЛЕНАНД, 2009. — с. 496.

52. *Крюковский А. С., Лукин Д. С., Кирьянова К. С.* Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. — 2012. — т. 57, № 9. — с. 1028—1028.
53. *Haselgrove J.* Ray Theory and a New Method for Ray Tracing // Physics of the Ionosphere. — 1955. — с. 355.
54. *Haselgrove C. B., Haselgrove J.* Twisted Ray Paths in the Ionosphere // Proceedings of the Physical Society. — 1960. — т. 75, № 3. — с. 357—363. — DOI: 10.1088/0370-1328/75/3/304. — URL: <https://doi.org/10.1088/0370-1328/75/3/304>.
55. *Haselgrove J.* The Hamiltonian ray path equations // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. — 1963. — т. 25. — с. 397—399. — DOI: 10.1016/0021-9169(63)90173-9.
56. *Крюковский А. С., Лукин Д. С., Растягаев Д. В.* Моделирование лучевой и каустической структуры электромагнитных полей по данным радиотомографии ионосферы в окрестности экваториальной аномалии // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2010. — т. 15, № 8. — с. 5—11.
57. *Крюковский А. С., Кирьянова К. С.* Динамическое моделирование распространения радиоволн в окрестности экваториальной аномалии на основе метода бихарактеристик // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2011. — т. 16, № 8. — с. 21—25.
58. *Jones R. M., Stephenson J. J.* A versatile three-dimensional ray tracing computer program for radio waves in the ionosphere // NASA STI/Recon Technical Report N. — 1975. — т. 76.
59. Numerical modeling of the high-latitude F-layer anomalies / V. S. Mingalev [и др.] // Ionospheric Modelling. — Springer, 1988. — с. 323—334.
60. *Андреев М. Ю., Лукичева Т. Н., Мингалев В. С.* Модельное исследование влияния главного ионосферного провала на наклонное распространение коротких радиоволн // Геомагнетизм и аэрономия. — 2006. — т. 46, № 1. — с. 99—105.



61. *Coleman C. J.* Ionospheric ray-tracing equations and their solution // URSI Radio Science Bulletin. — 2008. — т. 2008, № 325. — с. 17–23. — DOI: 10.23919/URSIRSB.2008.7909582.
62. *Nickisch L. J.* Practical applications of Haselgrove's equations for HF systems // URSI Radio Science Bulletin. — 2008. — т. 2008, № 325. — с. 36–48. — DOI: 10.23919/URSIRSB.2008.7909584.
63. Specific propagation of radiowaves from the Intercosmos-19 satellite in the region of the nighttime equatorial anomaly crest / G. A. Zhibankov [и др.] // Geomagnetism and Aeronomy. — 2010. — т. 50, № 1. — с. 119–126. — DOI: 10.1134/S0016793210010135. — URL: <https://doi.org/10.1134/S0016793210010135>.
64. IONORT: A Windows software tool to calculate the HF ray tracing in the ionosphere / A. Azzarone [и др.] // Computers & Geosciences. — 2012. — т. 42. — с. 57–63. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2012.02.008>. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009830041200043X>.
65. Using IRI and GSM TIP model results as environment for HF radio wave propagation model during the geomagnetic storm occurred on September 26–29, 2011 / D. S. Kotova [и др.] // Advances in Space Research. — 2015. — т. 56, № 9. — с. 2012–2029. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2015.05.009>. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117715003348> ; Advances in Equatorial, Low- and Mid-Latitude Mesosphere, Thermosphere and Ionosphere Studies.
66. *Huang X., Reinisch B. W.* Real-time HF ray tracing through a tilted ionosphere // Radio Science. — 2006. — т. 41, № 5. — DOI: 10.1029/2005RS003378. — eprint: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2005RS003378>. — URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2005RS003378>.
67. *Захаров В. Е., Черняк А. А.* Численная модель расчета радиотрасс коротких радиоволн в ионосфере // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Серия: Физико-математические и технические науки. — 2007. — № 3.

68. Численное моделирование влияния геомагнитной бури 2-3 мая 2010 года на распространение коротких радиоволн в ионосфере / Д. С. Котова [и др.] // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 2014. — т. 57, № 7. — с. 519—530.
69. Развитие модели распространения коротких радиоволн в ионосфере / Д. С. Котова [и др.] // Химическая физика. — 2015. — т. 34, № 12. — с. 62—62.
70. Global model of the thermosphere-ionosphere-protonosphere system / A. A. Namgaladze [и др.] // Pure and Applied Geophysics. — 1988. — т. 127, № 2/3. — с. 219—254.
71. Глобальная численная модель термосферы, ионосферы и протоносферы Земли / А. А. Намгаладзе [и др.] // Геомагнетизм и аэрономия. — 1990. — т. 30, № 4. — с. 612—619.
72. Влияние геомагнитных бурь 26–30 сентября 2011 года на ионосферу и распространение радиоволн КВ-диапазона. I–Ионосферные эффекты / М. В. Клименко [и др.] // Геомагнетизм и аэрономия. — 2015. — т. 55, № 6. — с. 769—789.
73. Влияние геомагнитной бури 26-30 сентября 2011 г. на ионосферу и распространение КВ-радиоволн. II. Распространение радиоволн / Д. С. Котова [и др.] // Геомагнетизм и аэрономия. — 2017. — т. 57, № 3. — с. 312—325.
74. *Захаров В. Е.* Формирование амплитудных и поляризационных характеристик коротких волн при распространении в ионосфере // Радиотехника и электроника. — 2019. — т. 64, № 6. — с. 525—534.
75. Radiotomography and HF ray tracing of the artificially disturbed ionosphere above the Sura heating facility / E. S. Andreeva [и др.] // Radio Science. — 2016. — т. 51, № 6. — с. 638—644. — DOI: 10.1002/2015RS005939.
76. Modeling the HF Ray Trajectories and Vertical and Oblique Ionograms in the Artificially Disturbed Ionosphere Based on Radiotomographic Data / A. M. Padokhin [и др.] // Moscow University Physics Bulletin. — 2019. — т. 74, № 3. — с. 282—290. — DOI: 10.3103/S002713491903010X. — URL: <https://doi.org/10.3103/S002713491903010X>.

77. Моделирование ионограмм для исследования перемещающихся ионосферных возмущений и их влияние на суточные ходы максимально наблюдаемых частот / В. А. Иванов [и др.] // Георесурсы. — 2006. — т. 19, № 2.
78. *Ларюнин О. А., Куркин В. И.* Восстановление параметров ионосферных возмущений по динамике серпообразных особенностей на ионограммах // Солнечно-земная физика. — 2011. — № 19. — с. 107—115.
79. *Цунг-Йен Н.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач: Пер. с англ. — Мир, 1982. — с. 296.
80. *Vidale J.* Finite-difference calculation of travel times // Bulletin of the Seismological Society of America. — 1988. — т. 78, № 6. — с. 2062—2076.
81. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. 2 изд. — БХВ-Петербург, 2011. — с. 587.
82. *Strangeways H. J.* Effect of horizontal gradients on ionospherically reflected or transionospheric paths using a precise homing-in method // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. — 2000. — т. 62, № 15. — с. 1361—1376. — DOI: [https://doi.org/10.1016/S1364-6826\(00\)00150-4](https://doi.org/10.1016/S1364-6826(00)00150-4). — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364682600001504>.
83. *Coleman C. J.* Analysis and Modeling of Radio Wave Propagation. — Cambridge University Press, 2017. — DOI: 10.1017/9781316798607.
84. *Bilitza D., Reinisch B. W.* International Reference Ionosphere 2007: Improvements and new parameters // Advances in Space Research. — 2008. — т. 42, № 4. — с. 599—609. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2007.07.048>. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0273117708000288>.
85. *Сажин В. И.* Компьютерное моделирование распространения радиоволн в регулярной ионосфере: учеб. пособие. — Иркутск: Изд-во ИГУ. — с. 91.
86. *Budden K. G.* The Propagation of Radio Waves: The Theory of Radio Waves of Low Power in the Ionosphere and Magnetosphere. — Cambridge University Press, 1988. — ISBN 9780521369527. — URL: <https://books.google.ru/books?id=j0UHJpuEUqIC>.

87. *Бабич В. М.* Многомерный метод ВКБ или лучевой метод. Его аналоги и обобщения // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — 1988. — т. 34. — с. 93—134.
88. *Bennett J. A.* Variations of the ray path and phase path: A Hamiltonian formulation // Radio Science. — 1973. — т. 8, № 8/9. — с. 737—744.
89. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики: пер. с англ. — Мир, 1965. — с. 408.
90. *Голдстейн Г.* Классическая механика. — М.: Наука, 1975. — с. 415.
91. *Julian B. R., Gubbins D.* Three-dimensional seismic ray tracing // Journal of Geophysics. — 1977. — т. 43, № 1. — с. 95—113.
92. *Moser T. J.* Shortest path calculation of seismic rays // Geophysics. — 1991. — т. 56, № 1. — с. 59—67.
93. *Koketsu K., Sekine S.* Pseudo-bending method for three-dimensional seismic ray tracing in a spherical earth with discontinuities // Geophysical Journal International. — 1998. — т. 132, № 2. — с. 339—346.
94. *Zhao D., Lei J.* Seismic ray path variations in a 3D global velocity model // Physics of the Earth and Planetary Interiors. — 2004. — т. 141, № 3. — с. 153—166.
95. *Ballard S., Hipp J. R., Young C. J.* Efficient and accurate calculation of ray theory seismic travel time through variable resolution 3D Earth models // Seismological Research Letters. — 2009. — т. 80, № 6. — с. 989—999.
96. *Šmilauer J.* The variational method of ray path calculation in an anisotropic, generally inhomogeneous ionosphere // Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics. — 1970. — т. 32, № 1. — с. 83—96.
97. *Воронков В. А., Данилкин И. П.* Простой практический метод расчета радиотрасс в ионосфере между фиксированными точками вариационным способом // Калинингр. Гос.универс., деп. 29.07.85. — 1985. — т. 5545—85 ДЭП.
98. *Карпенко А. Л., Попов А. В.* Метод установления для решения двухточечной траекторной задачи // В кн. Распространение радиоволн в ионосфере. — 1986. — с. 51.

99. *Бензик А. В.* Прогнозирование траекторных характеристик распространения ДКМ-радиоволн на основе принципа ферма // Техника радиосвязи. — 2014. — № 1. — с. 32—41.
100. *Балаганский Б. А.* Исследование влияния среднемасштабных возмущений на характеристики распространения коротких радиоволн в трехмерно неоднородной ионосфере [текст] : дис. ... канд. физ.- мат. наук : 01.04.03 / Балаганский Б. А. — Чита, 2003. — 172 с.
101. *Coleman C. J.* Point-to-point ionospheric ray tracing by a direct variational method // Radio Science. — 2011. — т. 46, № 5. — RS5016. — DOI: 10.1029/2011RS004748. — eprint: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2011RS004748>. — URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2011RS004748>.
102. *Fox C.* An introduction to the calculus of variations. — Courier Corporation, 1987.
103. Calculus of variations / I. M. Gelfand, R. A. Silverman [и др.]. — Courier Corporation, 2000.
104. *Jónsson H., Mills G., Jacobsen K. W.* Nudged elastic band method for finding minimum energy paths of transitions // Classical and Quantum Dynamics in Condensed Phase Simulations. — World Scientific, 2008. — с. 385—404. — DOI: 10.1142/97898128396640016. — eprint: <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/97898128396640016>. — URL: <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/97898128396640016>.
105. *Носиков И. А., Бессараб П. Ф., Клименко М. В.* Применение метода поперечных смещений для расчёта коротковолновых радиотрасс. Постановка задачи и предварительные результаты // Известия высших учебных заведений. Радиофизика. — 2016. — т. 59, № 1. — с. 1—14.
106. Использование метода поперечных смещений для расчета радиотрасс в модельной ионосфере / И. А. Носиков [и др.] // Physics of Auroral Phenomena. — 2015. — т. 38, № 1. — с. 142—145.
107. *Henkelman G., Uberuaga B. P., Jónsson H.* A climbing image nudged elastic band method for finding saddle points and minimum energy paths // The Journal of Chemical Physics. — 2000. — т. 113, № 22. — с. 9901—9904. —

- DOI: 10.1063/1.1329672. — eprint: <https://doi.org/10.1063/1.1329672>. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.1329672>.
108. *Andersen H. C.* Molecular dynamics simulations at constant pressure and/or temperature // *The Journal of Chemical Physics*. — 1980. — т. 72, № 4. — с. 2384—2393. — DOI: 10.1063/1.439486. — eprint: <https://doi.org/10.1063/1.439486>. — URL: <https://doi.org/10.1063/1.439486>.
109. Investigation of optical path functional for high and low ionospheric radio rays / I. A. Nosikov [и др.] // 2016 URSI Asia-Pacific Radio Science Conference (URSI AP-RASC). — IEEE. 2016. — с. 1317—1320.
110. *Носиков И. А., Клименко М. В.* Исследование функционала верхних и нижних лучей в задаче расчета радиотрасс в модельной ионосфере // *Химическая физика*. — 2017. — т. 36, № 12. — с. 61—66.
111. *Catmull E., Rom R.* A class of local interpolating splines // *Computer aided geometric design*. — Elsevier, 1974. — с. 317—326.
112. Generalized Force Approach to Point-to-Point Ionospheric Ray Tracing and Systematic Identification of High and Low Rays / I. A. Nosikov [и др.] // *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. — 2020. — т. 68, № 1. — с. 455—467. — DOI: 10.1109/TAP.2019.2938817.
113. *Nocedal J., Wright S. J.* *Numerical Optimization*. — Second. — New York, NY, USA : Springer, 2006.
114. *Nosikov I. A., Klimenko M. V., Bessarab P. F.* Identification of Low and High Ionospheric Rays by a Direct Variational Method // 2018 2nd URSI Atlantic Radio Science Meeting (AT-RASC). — IEEE. 2018. — с. 1—4.
115. Duplication, Collapse, and Escape of Magnetic Skyrmions Revealed Using a Systematic Saddle Point Search Method / G. P. Müller [и др.] // *Physical review letters*. — 2018. — т. 121, № 19. — с. 197202.
116. *Plasencia Gutiérrez M., Argáez C., Jónsson H.* Improved Minimum Mode Following Method for Finding First Order Saddle Points // *Journal of Chemical Theory and Computation*. — 2017. — т. 13, № 1. — с. 125—134. — DOI: 10.1021/acs.jctc.5b01216. — eprint: <https://doi.org/10.1021/acs.jctc.5b01216>. — URL: <https://doi.org/10.1021/acs.jctc.5b01216> ; PMID: 27959552.

117. *Nosikov I. A., Klimenko M. V., Bessarab P. F.* Глобальная оптимизация как способ исключения проблемы задания начальных условий при модельном расчете радиотрасс // XXVI Всероссийская открытая научная конференция "Распространение радиоволн". т. 2. — 2019. — с. 426—430.
118. Marmousi, model and data / A. Brougois [и др.] // EAEG workshop-practical aspects of seismic data inversion. — 1990.
119. *Rawlinson N., Hauser J., Sambridge M.* Seismic ray tracing and wavefront tracking in laterally heterogeneous media // Advances in Geophysics. — 2008. — т. 49. — с. 203—273.
120. *Pereyra V., Lee W. H. K., Keller H. B.* Solving two-point seismic-ray tracing problems in a heterogeneous medium: Part 1. A general adaptive finite difference method // Bulletin of the Seismological Society of America. — 1980. — т. 70, № 1. — с. 79—99.
121. *Sadeghi H., Suzuki S., Takenaka H.* A two-point, three-dimensional seismic ray tracing using genetic algorithms // Physics of the Earth and Planetary Interiors. — 1999. — т. 113, № 1—4. — с. 355—365.
122. Anisotropic 3-D Ray Tracing and Its Application to Japan Subduction Zone / T. Gou [и др.] // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 2018. — т. 123, № 5. — с. 4088—4108.
123. Application of the nudged elastic band method to the point-to-point radio wave ray tracing in IRI modeled ionosphere / I. A. Nosikov [и др.] // Advances in Space Research. — 2017. — т. 60, № 2. — с. 491—497.
124. Application of the optimization method to the point-to-point radio wave ray-tracing problem / I. A. Nosikov [и др.] // . т. 2017. — URSI, 2017. — с. 14—19.
125. *Гершман Б. Н., Григорьев Г. И.* О неоднородностях электронной концентрации, возникающих при распространении ионосферных перемещающихся возмущений // Геомагнетизм и аэронавигация. — 1966. — т. 6, № 2. — с. 246—254.
126. Statistical characteristics of medium-scale traveling ionospheric disturbances revealed from the Hokkaido East and Ekaterinburg HF radar data / A. V. Oinats [и др.] // Earth, Planets and Space. — 2016. — т. 68, № 1. — с. 8.

127. The 6 September 2017 X-class solar flares and their impacts on the ionosphere, GNSS, and HF radio wave propagation / Y. Yasyukevich [и др.] // *Space Weather*. — 2018. — т. 16, № 8. — с. 1013—1027.
128. The international reference ionosphere: Model update 2016 / D. Bilitza [и др.] // *EGU General Assembly Conference Abstracts*. т. 18. — 2016.
129. International Reference Ionosphere 2016: From ionospheric climate to real-time weather predictions / D. Bilitza [и др.] // *Space Weather*. — 2017. — т. 15, № 2. — с. 418—429. — DOI: 10.1002/2016SW001593. — eprint: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/2016SW001593>. — URL: <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/2016SW001593>.
130. *Sheppard D., Terrell R., Henkelman G.* Optimization methods for finding minimum energy paths // *The Journal of chemical physics*. — 2008. — т. 128, № 13. — с. 134106.



## Список рисунков

- |     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Иллюстрация лучевых траекторий радиоволны, полученных решением уравнения эйконала методом бихарактеристик в однослойной модели ионосферы. Диапазон начальных углов излучения составляет $5^\circ - 46^\circ$ с шагом $1.5^\circ$ . Рабочая частота 14 МГц. . . . . | 19 |
| 1.2 | Иллюстрация лучевых траекторий радиоволны, полученных решением уравнения эйконала методом характеристик в двухслойной модели ионосферы. Диапазон начальных углов излучения составляет $5^\circ - 46^\circ$ с шагом $1^\circ$ . Рабочая частота 14 МГц.             | 20 |
| 1.3 | Примеры двухскачковых и волноводных лучевых траекторий в модельной ионосфере. Рабочая частота 6 МГц. . . . .   | 21 |
| 1.4 | Иллюстрация метода пристрелки в двухслойной ионосфере. Рабочая частота 12 МГц. Черными линиями представлены лучи, полученные методом пристрелки. Красной линией показано найденное решение. . . . .  | 26 |
| 1.5 | Иллюстрация итерационного поиска луча вариационным методом. Черной линией представлено начальное приближение; пунктирными линиями – промежуточные положения траектории в процессе оптимизации; красной линией – искомое решение. . . .                             | 30 |
| 1.6 | Пример расчета лучевых траекторий радиоволны с частотой 16 МГц вариационным методом К. Коулмана [101]. Белые и черные линии представляют собой лучевые траектории обыкновенной и необыкновенной волны соответственно. . . . .                                      | 31 |
| 2.1 | Иллюстрация кривой $\gamma$ , соединяющей граничные точки $A$ и $B$ , в непрерывном (а) и кусочно-линейном представлении луча (б). . .   | 35 |
| 2.2 | Профиль плазменной частоты ионосферы, заданный по формуле (2.9). . . . .   | 40 |

- 2.3 Лучевые траектории радиоволны с частотой 12 МГц, соединяющие заданные положения передатчика  $A$  и приемника  $B$  в двумерной изотропной ионосфере (а). Электронная концентрация задается в соответствии с формулой (2.9). Известные решения лучевых уравнений в виде верхнего и нижнего луча представлены черной и красной линиями; Результаты численных расчетов прямой минимизацией представлены справа (б). Пустыми черными кружками и пунктирной линией представлено начальное приближение. Сплошными черными кружками и сплошной черной линией изображено найденное решение. . . . . 41
- 2.4 Слева представлены решения лучевых уравнений (а) для радиоволны с частотой 12 МГц в среде, заданной согласно формуле (2.9). Справа – набор виртуальных лучей (б), полученных с применением трехточечной схемы и прямой минимизацией. Черные пустые кружки представляют фиксированные точки, а черные сплошные кружки – подвижные точки траектории. . . . . 43
- 2.5 Сравнение решений граничной задачи (а) с результатом исследования функционала радиолуча, полученного методикой экспресс анализа (б). . . . . 43
- 2.6 Схематичное представление методики экспресс анализа с использованием трехточечной схемы: две точки  $A$  и  $B$  закреплены на поверхности Земли в соответствии с граничными условиями; третья точка (вершина)  $C$  последовательно фиксируется в узлах выбранной сетки (белые кружки). Черные кривые представляют виртуальные траектории, полученные интерполяцией Катмул-Ром сплайном по трем заданным точкам. 45
- 2.7 Двумерная карта фазового пути виртуальных траекторий, построенная с использованием методики экспресс анализа. Белые линии представляют лучевые траектории радиоволны частоты 12 МГц. Модельная ионосфера задавалась по формуле (2.9). . . . . 46

- 3.1 Пример расчета верхних лучей радиоволны с частотой 12 МГц методом обобщенной силы. Модельная ионосфера задается формулой (2.9). Серыми кружками и серыми пунктирными линиями изображены начальные приближения. Последовательность задания начальных приближений обозначена цифрами. Черными кружками и черной сплошной линией представлены найденные решения. . . . . 50
- 3.2 Иллюстрация примера, представленного на рис. 3.1, в пространстве функционала радиолуча. Белыми кружками представлены положения начальных приближений. Белой стрелкой схематично обозначен процесс сходимости к локальным минимумам. Белыми крестиками представлены положения стационарных точек целевой функции. . . . . 51
- 3.3 Иллюстрация метода поиска седловой точки в пространстве функционала радиолуча. Белым крестиками в минимуме и седловой точке обозначены положения решения в начале и конце процедуры оптимизации соответственно; черным крестиком – промежуточное положение в момент смены знака минимального собственного значения гессиана радиолуча. Белыми пунктирными линиями схематично изображен процесс сходимости решения от минимума к седловой точке. . . . . 53
- 3.4 Результаты расчета нижнего луча прямым вариационным методом. Аналитическая модель ионосферы задается в соответствии с формулой (2.9); Серыми кружками обозначены положения точек траектории в процессе оптимизации. Начальное приближение представлено пустыми кружками и пунктирной линией. Для начального приближения, заданном на найденном верхнем луче, задается случайное малое смещение в соответствие с алгоритмом поиска седловых точек. Красные линии с кружками показывают найденное решение в виде нижнего луча. . . . . 57

- 3.5 Иллюстрация метода глобальной оптимизации в пространстве функционала радиолуча. Белым крестиками обозначены положения стационарных точек. Белыми сплошными стрелками схематично изображен процесс систематического поиска решений через седловую точку. Черный крестик обозначает момент смены знака минимального собственного значения гессиана функционала. . . . . 59
- 3.6 Результат применения алгоритма глобального поиска лучей. Модельная среда задается согласно формуле (2.9). Рабочая частота равна 12 МГц. Верхние и нижние лучи представлены черными и красными сплошными линиями. . . . . 60
- 4.1 Слева (а) представлен профиль плазменной частоты аналитической модели ионосферы, заданной по формуле (4.1). Справа (б) представлены лучевые траектории для радиоволны с частотой 14 МГц для заданных граничных условий. Черные и красные кружки представляют верхний и нижний лучи, найденные методом обобщенной силы и глобальной оптимизацией. Синими кружками обозначены точки траектории, движущиеся только вдоль нижней границы ионосферы (черная пунктирная линия на рис. (б)). Черной и красной сплошными линиями изображены известные решения, полученные в программном пакете Maple, для верхнего и нижнего лучей. Серой пунктирной линией обозначена высота максимума ионосферного слоя  $F2$ . . . . . 64
- 4.2 Двумерные карты распределения фазового пути лучевых траекторий для диапазона частот 8 – 18 МГц: (а) — 8 МГц, (б) — 10 МГц, (в) — 12 МГц, (г) — 14 МГц, (д) — 16 МГц, (ж) — 18 МГц. Белыми сплошными линиями показаны решения граничной задачи (верхние и нижние лучи) в параболической модели ионосферы. . . . . 66

- 4.3 Слева (а) представлен профиль плазменной частоты ионосферы, заданной по формуле (4.2); Справа (б) представлены лучевые траектории радиоволны с частотой 12 МГц для заданных граничных условий. Незакрашенными черными кружками показано начальное приближение луча, закрашенными черными и красными кружками — результат оптимизации соответственно верхних и нижних лучей методом обобщенной силы и глобальной оптимизацией, черными и красными сплошными линиями — численные решения методом пристрелки [63]. Серыми пунктирными линиями обозначены максимумы  $E$  и  $F2$  ионосферных слоев. . . . . 69
- 4.4 Двумерные карты распределения фазового пути лучевых траекторий для диапазона частот 6 – 16 МГц: (а) — 6 МГц, (б) — 8 МГц, (в) — 10 МГц, (г) — 12 МГц, (д) — 14 МГц, (ж) — 16 МГц. Белыми сплошными линиями показаны решения граничной задачи (верхние и нижние лучи) в двухслойной модельной ионосфере (см. формулу (4.2)). . . . . 71
- 4.5 Результаты расчетов лучевых траекторий методом обобщенной силы и глобальной оптимизацией для частоты 10 МГц в трехмерной неоднородной среде. Модель ионосферы задается по формуле (4.2). Черными линиями представлены верхние лучи, а синими линиями – нижние лучи. Рисунки (б) и (в) представляют собой проекции рисунка (а) сбоку и сверху соответственно. . . . 73
- 4.6 Результаты расчетов лучевых траекторий методом обобщенной силы и глобальной оптимизации для частоты 10 МГц в двухслойной среде без неоднородности. Черными линиями представлены верхние лучи, синими линиями – нижние лучи. . . 74

- 4.7 Результаты расчетов, полученные с использованием алгоритма глобальной оптимизации на трассе Хабаровск ( $47^\circ$  с.ш.,  $134^\circ$  в.д.) – Торы ( $51^\circ$  с.ш.,  $103^\circ$  в.д.) в день летнего солнцестояния 22.06.2016. Электронная концентрация задается моделью IRI-2007. Рабочая частота равна 12 МГц. Лучи получены двумя различными подходами – вариационным методом и численным решением уравнения эйконала методом характеристик с дальнейшим применением алгоритмов трассировки и пристрелки. Верхние и нижние лучи представлены черными и синими линиями соответственно. Лучи, изображенные пунктирной линией представляют решения, не найденные методом пристрелки для трассировки с шагом по углу возвышения превышающим  $1^\circ$ . Для идентификации луча 4 требуется значение шага по углу менее  $0.1^\circ$ . 77
- 4.8 Результаты расчетов, полученные с использованием метода обобщенной силы и глобальной оптимизации на трассе Калининград ( $55^\circ$  с.ш.,  $20^\circ$  в.д.) – Стокгольм ( $59^\circ$  с.ш.,  $18^\circ$  в.д.). Рабочая частота равна 8 МГц. В данном случае распределение электронной концентрации соответствовало 12:00 UT 22 июня 2014 г. Верхние и нижние лучи представлены черными и синими линиями соответственно слева (а) и белыми линиями справа (б). Лучевые траектории изображены на фоне распределения плазменной частоты (а) и карты распределения фазового пути (б), полученной процедурой экспресс анализа. . . . . 80
- 4.9 Результаты расчета радиотрассы с частотой 9 МГц методом обобщенной силы и глобальной оптимизацией между передающей (г. Калининград;  $55^\circ$  с.ш.,  $20^\circ$  в.д.) и приемной станциями (г. Тромсе;  $66^\circ$  с.ш.,  $19^\circ$  в.д.) (черные линии) на фоне распределения плазменной частоты по модели IRI-2007 без учета перемещающихся ионосферных возмущений (а) и при задании ПИВ на высотах  $F^2$  слоя (б). . . . . 81

- 4.10 Дистанционно-частотные характеристики наклонного зондирования на трассе Хабаровск – Торы за 8 января 2016 года 17:11 UT (а), 9 января 2016 года в 5:31 UT (б), 4 марта 2016 года в 17:36 UT (в) и 28 марта 2016 года 21:51 UT (г). Дистанция представлена в виде задержки радиосигнала. Данные наблюдений показаны черными точками. Результаты, полученные с использованием вариационного метода и модели IRI-2007, показаны цветными кружками. Красные и синие кружки обозначают следы односкачковых верхних и нижних лучей соответственно. Метки « $1F2$ », « $2F2$ » и « $3F2$ » указывают на следы лучей с одним двумя или тремя скачками соответственно, отраженных от ионосферного слоя  $F2$ . . . . . 84
- 4.11 Результаты численных расчетов вариационным методом радиотрассы Хабаровск – Торы в момент времени 5:31 UT 9 января 2016 года для рабочих частот 15 МГц (а) и 24 МГц (б). Электронная концентрация задается моделью IRI-2007. Верхние и нижние лучи показаны черными и синими линиями соответственно. . . . . 85

## Приложение А

### Метод проецирования скорости

Метод «проецирования скорости» относится к классу градиентных методов, и, как и все градиентные методы, предназначен для поиска локального оптимума [108]. Метод напоминает моделирование массивной изображающей точки в многомерном конфигурационном пространстве, где в качестве скорости изображающей точки используется лишь ее проекция на направление обобщенной силы. Преимуществом такой формулировки по сравнению, например, с методом градиентного спуска является возможность изображающей точки уско-ряться и быстрее достигать оптимума. Алгоритм активно применяют во многих областях исследований, где возникают проблемы оптимизации [130]. В данной работе метод адаптирован к задаче о расчете лучевых траекторий радиоволн с заданными граничными условиями. В частности, он используется для перемещения цепочки точек траектории вдоль обобщенной силы, в результате чего некоторое начальное приближение сходится к радиолучу.

В рамках метода проецирования скорости, координаты точек траектории обновляются в соответствии с уравнением движения:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m} \mathbf{F}, \quad (\text{A.1})$$

где  $m$  – «масса» точки в конфигурационном пространстве, две точки над символом  $\mathbf{r}$  обозначают вторую производную по отношению к фиктивному «времени»  $t$ . Уравнение (A.1) повторяется с использованием некоторой числовой схемы, и на каждой итерации сохраняется только составляющая скорости, параллельная обобщенной силе. Кроме того, если величина этой проекции становится отрицательной, на текущей итерации скорость обнуляется. Ниже приведено подробное описание метода проецирования скорости в сочетании с алгоритмом Верле [108]:

1. Задаем параметры оптимизации, включающие шаг по времени  $\Delta t$  и фиктивную массу  $m$ . В наших расчетах используются следующие значения параметров:  $\Delta t = 0.1$  and  $m = 1 \text{ км}^{-1}$ .
2. Задаем начальное положение точек траектории,  $\mathbf{r}^{(0)}$ , и соответствующие им скорости,  $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{0}$ . Рассчитываем обобщенную силу,  $\mathbf{F}^{(0)}$ . Ис-



пользуем формулу (3.1) для верхних лучей и формулу (3.4) для нижних лучей. Запуск итерационной процедуры.

3. Если сила в каждой точке траектории меньше некоторого заданного порогового значения,  $F_{\text{tol}}$ , то оптимизация завершена. Иначе переходим к следующему пункту.
4. При заданной конфигурации  $\mathbf{r}^{(I)}$ , скоростей  $\mathbf{v}^{(I)}$  и сил  $\mathbf{F}^{(I)}$  для текущей итерации  $I$ , рассчитываем новые положения точек траектории в соответствии с формулой:

$$\mathbf{r}^{(I+1)} = \mathbf{r}^{(I)} + \mathbf{v}^{(I)} \Delta t + \frac{1}{2m} \mathbf{F}^{(I)} \Delta t^2. \quad (\text{A.2})$$

5. Рассчитываем силу  $\mathbf{F}^{(I+1)}$  соответствующую положениям  $\mathbf{r}^{(I+1)}$ . Используем формулу (3.1) для верхних лучей и формулу (3.4) для нижних лучей.
6. Рассчитываем новые значения скоростей в соответствии с формулой:

$$\mathbf{v}^{(I+1)} = \mathbf{v}^{(I)} + \frac{1}{m} (\mathbf{F}^{(I)} + \mathbf{F}^{(I+1)}) \Delta t. \quad (\text{A.3})$$

7. Коррекция скорости  $\mathbf{v}^{(I+1)}$ , используя следующую формулу:

$$\mathbf{v}^{(I+1)} \rightarrow \begin{cases} (\mathbf{v}^{(I+1)} \cdot \mathbf{F}^{(I+1)}) \mathbf{F}^{(I+1)} / |\mathbf{F}^{(I+1)}|^2, \\ \text{если } (\mathbf{v}^{(I+1)} \cdot \mathbf{F}^{(I+1)}) > 0, \\ \mathbf{0}, \\ \text{если } (\mathbf{v}^{(I+1)} \cdot \mathbf{F}^{(I+1)}) \leq 0. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

8. Возврат в пункт 3.

## Благодарности

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своим учителям – к.ф.-м.н Клименко М. В. и к.ф.-м.н Бессарабу П. Ф. за пройденную научную школу, внимание и всестороннюю неоценимую помощь в период моего обучения в аспирантуре. Автор также выражает глубокую признательность к.ф.-м.н. Клименко В. В., к.ф.-м.н. Бессарабу Ф. С., к.ф.-м.н. Котовой Д. С., д.ф.-м.н. проф. Карпову И. В., д.ф.-м.н. проф. Коренькову Ю. Н., д.ф.-м.н. проф. Захарову В. Е. и всему коллективу Калининградского филиала ИЗМИРАН за ценные замечания и полезные дискуссии. Отдельную благодарность автор выражает проф. Х. Йонссону за внимание и ценные советы.

Автор считает приятным долгом поблагодарить своих родителей – Носикову Г. В. и Носикова А. Н. за всестороннюю поддержку и любимую жену Носикову В. В. за понимание и создание благоприятных условий для работы. Автор также выражает признательность своим родным и близким за поддержку.