

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

На правах рукописи



Семенов Вячеслав Леонович

Моделирование наноэлектромеханических детекторов терагерцевого излучения

Специальность 01.04.03 — радиофизика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
В.Г. Лейман

Долгопрудный — 2015

“...опуститься в грязную воду, если это вода истины, и не гнать от себя холодных лягушек и теплых жаб...”

Фридрих Ницше, «Так говорил Заратустра»

Содержание

Введение	5
1 Обзор некоторых типов микродетекторов ТГц излучения, работающих при комнатной температуре	10
1.1 Микроболометры	11
1.2 Диоды Шоттки	12
1.3 Детекторы на основе полевых транзисторов с высокой подвижностью электронов	15
1.4 Выводы	17
2 Микроэлектромеханические детекторы модулированного терагерцевого излучения	19
2.1 Моделирование и расчет параметров МЭМ-детекторов	22
2.2 Чувствительность МЭМ-детекторов	26
2.3 Параметрическая неустойчивость в МЭМ-детекторах	29
2.4 Выводы	38
3 Расчет сосредоточенных параметров распределенных резонаторов, описываемых локальными уравнениями	39
3.1 Пример получения уравнения колебаний эффективного элементарного осциллятора	40
3.2 Случай волноведущих систем, описываемых локальными уравнениями	44
3.3 Описание механических резонаторов в терминах сосредоточенных параметров	46
3.4 Выводы	52
4 Примеры резонаторов, описываемых нелокальными уравнениями и их сведение к элементарным осцилляторам	53
4.1 Дисперсионные свойства плазменных волн в некоторых двумерных и (квази-)одномерных электронных системах	55
4.2 Колебания электронной плазмы в полевом транзисторе с высокой подвижностью электронов и цилиндрическим затворным электродом . . .	64
4.3 Вынужденные плазменные колебания в отрезке из одностенной углеродной нанотрубки с металлической проводимостью	72
4.4 Выводы	77
5 Пример расчета характеристик наноэлектромеханического детектора модулированного терагерцевого излучения	78

5.1	Решение задачи о возбуждении плазменных колебаний в детекторе . . .	81
5.2	Получение уравнения колебаний элементарного осциллятора, соответствующего плазменному резонатору	83
5.3	Получение уравнения колебаний элементарного осциллятора, соответствующего механическому резонатору	84
5.4	Вычисление изменения основной частоты плазменного резонанса при малой деформации нанотрубок	85
5.5	Вычисление порога параметрической неустойчивости	87
5.6	Вычисление электрической ёмкости двух нанотрубок при их малой деформации	88
5.7	Результаты вычислений характеристик детектора	89
5.8	Выводы	96
Заключение		98
А Приложения		101
A.1	Вычисление порогов неустойчивости системы уравнений ёмкостного датчика с помощью метода связанных колебаний	101
A.2	Плазменные волны в двумерном электронном газе, окруженном слоями из диэлектрических и металлических материалов	106
A.3	Плазменные волны в одностенных углеродных нанотрубках с металлической проводимостью	109
A.4	Расчет колебаний электронной плазмы в полевом транзисторе с цилиндрическим затвором	113
A.5	Уравнение Поклингтона и его решение в случае ОСУНТ с металлической проводимостью	121
Использованные источники		126

Введение

Успехи в области микро- и нанотехнологий открывают новые возможности для создания устройств малого размера, которые могли бы использоваться для сбора данных, выполнения манипуляций и коллективных задач в трудно доступных местах с высокой позиционной точностью [1–6]. В настоящее время созданы и опробованы устройства размером в десятки нанометров, которые могут быть использованы, в частности, для контролируемой доставки лекарств [7]. Они представляют собой крошечные контейнеры, наполненные активным веществом, которые открываются под воздействием фермента, испускаемого органом, к которому оно доставляется. Тем не менее, для полной реализации прикладного потенциала подобных устройств (роботов) необходимо, чтобы в их малом размере содержались следующие функциональные элементы: компактные источники питания [8, 9], двигатели и приводы [10–12], датчики контроля положения [13, 14], а также системы приема и передачи информации [15–17]. На данный момент самые маленькие устройства, обладающие подобным набором функций, имеют размеры порядка сантиметра [9, 18–21]. Создание устройств существенно меньших размеров (порядка сотен микрометров) встречает ряд принципиальных трудностей, одной из которых является реализация систем связи устройств между ними и их внешним управляющим модулем.

Сигнал от внешнего модуля может быть передан устройству посредством процессов самого разного вида: электрических (электромагнитные волны, магнитное поле), механических (акустические волны), тепловых и химических. При этом, ввиду малости размера устройства, существует проблема получения от него внешним модулем обратного сигнала с достаточной для приема интенсивностью. В настоящее время, работа описываемых в научных публикациях систем дистанционного управления микро- и наноустройствами (см., например, [7, 15, 22, 23]), заключается в том, что устройство реагирует на внешний сигнал, но не передает обратно никакой информации. К тому же, используемые в приведенных случаях термические и химические процессы преобразования и передачи сигнала характеризуются временем протекания порядка $10^{-2} \div 10^{-3}$ секунды и не могут обеспечить должную скорость приема информации, которая, например, может быть необходима для контроля за устройством в реальном времени. На текущий момент, наиболее разработанным и внедренным в практическое использование способом двухсторонней коммуникации с малыми электрическими системами (размером до нескольких миллиметров) является технология радиочастотной идентификации (RFID) [24]. При этом, несмотря на то, что размер микроэлектронных чипов, использующихся в RFID-метках, может быть меньше 1 мм, минимальный полный размер метки ограничивается размером антенны, который определяется используемым диапазоном излучения [25]. Можно отметить, что в

настоящее время являются коммерчески доступными RFID системы СВЧ диапазона с рабочей частотой около 1 ГГц и активно разрабатываются системы, работающие на более высоких частотах [26]. Также, появляются отдельные публикации о RFID системах, работающих в терагерцевом диапазоне частот [27–29].

Терагерцевое излучение имеет длину волны от 30 до 750 микрометров, благодаря чему оно может эффективно приниматься и излучаться антеннами соответствующего размера, установленными на малые электронные устройства. Таким образом, можно утверждать, что терагерцевый диапазон излучения лучше всего подходит для коммуникации с системами, размером в сотни микрометров. Однако, не смотря на то, что область терагерцевых технологий в последние годы переживает бурное развитие [30–33], создание компактных высокочувствительных перестраиваемых по частоте и работающих при комнатной температуре детекторов и генераторов терагерцевого излучения по-прежнему представляет собой сложную научную задачу. Это прежде всего обусловлено тем, что при приближении к терагерцевой области спектра, методы генерации и детектирования, используемые в радио- и СВЧ-диапазоне, а также в оптическом и ИК-диапазоне становятся мало эффективными. Так, вакуумные электронные приборы, при приближении к терагерцевой области, при своем изначально большом размере, требуют наличия сильных магнитных полей, а реализация терагерцевых квантовых генераторов и детекторов сталкивается с тем, что энергия терагерцевого фотона сравнима с тепловой энергией при комнатной температуре. Использование материалов, в которых реализуются низкоразмерные электронные системы, таких как полупроводниковые гетероструктуры GaAs/AlGaAs, углеродные нанотрубки с металлической проводимостью и графен, дает определенные возможности для преодоления этих трудностей [34–36]. С одной стороны, данные структуры являются микроскопическими квантовыми системами, в которых волны зарядовой плотности (плазмоны) оказываются сильно замедленными (в сотни раз по сравнению со светом), что позволяет удовлетворить требованию компактности, с другой — параметром затухания таких плазмонов является не отношение тепловой энергии к энергии фотона (как в случае лазеров), а отношение частоты электронных столкновений к частоте плазменных колебаний. Это, наряду с тем фактом, что время релаксации импульса электрона в данных системах может быть меньше пикосекунды, позволяет создавать на их основе микроразмерные терагерцевые резонаторы с приемлемой добротностью.

В последние годы был предложен ряд микроэлектромеханических детекторов терагерцевого излучения, принцип работы которых заключается в одновременном возбуждении модулированным сигналом высокочастотных плазменных и низкочастотных механических колебаний в системе нелинейно связанных резонаторов [37–40]. В целом, все эти устройства состоят из четырех элементов, как обыкновенный радио-

приемник — антенны, усилителя высокой частоты, нелинейного элемента, и усилителя низкой частоты. Выходной сигнал в таком устройстве формируется за счет выделения модулирующего сигнала в виде колебаний механического резонатора (кантилевера). Преобразованные в электрический ток с помощью простейшей схемы механические колебания дают выходной сигнал на единицу мощности, потребляемой устройством, порядка сотен миллиампер на Ватт. Это сопоставимо и даже превосходит чувствительности детекторов терагерцевого излучения других типов, работающих при комнатной температуре, которые активно разрабатываются в настоящее время [41, 42]. В силу простоты рассматриваемой схемы детектирования, может быть предложено большое количество новых устройств, в том числе оптомеханических, работающих по такому же принципу. Взяв за основу данный конкретный детектор такого типа, его можно модифицировать, изменяя, например, форму кантилевера, рабочую моду плазменных и/или механических колебаний, материал для плазменного резонатора, или используя другой способ преобразования механических колебаний в выходной сигнал. Моделирование и расчет характеристик таких устройств в общем случае представляет собой сложную вычислительную задачу, в рамках которой необходимо решать совместно уравнения электромагнетизма, гидродинамики и теории упругости. Кроме того, что такой подход очень громоздкий и требует огромного вычислительного времени. Также, он имеет другие существенные недостатки, например такие, как фактическая невозможность произвести анализ системы на предмет возникновения параметрической неустойчивости, которая может иметь место в рассматриваемых системах. Сделав определенные приближения, основным из которых является сведение колебаний распределенных резонаторов к колебанием эффективных *элементарных осцилляторов*¹, можно привести описание работы устройства к системе из двух дифференциальных уравнений, дальнейший анализ которой может быть произведен без привлечения сложных и медленно выполняющихся численных методов. Наличие общего подхода к моделированию и расчету характеристик детекторов рассматриваемого типа открыло бы возможность для разработки таких устройств для конкретных приложений, обладающих оптимальными параметрами.

Цели и задачи диссертационной работы.

- Разработка общих принципов моделирования микро-/наноэлектромеханических детекторов терагерцевого излучения на основе систем со связанными механи-

¹под элементарным осциллятором в диссертации понимается резонансная система, имеющая одну степень свободы (как это понимается в теоретической механике) и линейный отклик которой вблизи выбранного рабочего частотного диапазона описывается комплексной функцией Лоренцевого вида:

$$K(\omega) = \frac{A \times \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega},$$

где A — некоторая действительная константа, ω_0 и γ — частота и параметр затухания резонанса.

ческими и плазменными резонансами.

- Поиск схем детектирования терагерцевого излучения, работающих при комнатной температуре, пригодных для использования в системах коммуникации с автономными устройствами субмиллиметрового размера.

Научная новизна определяется тем, что в ней впервые:

- Исследованы условия возникновения параметрической неустойчивости в ряде микро-/наноэлектромеханических систем, включающих в себя связанные друг с другом механический и плазменный резонаторы.
- Решена задача о возбуждении плазменных колебаний в двумерном электронном газе полевого транзистора с высокой подвижностью электронов с цилиндрическим затворным электродом.
- Решено уравнение Поклингтона с точным ядром, описывающее антенну из отрезка одностенной углеродной нанотрубки, методом Галеркина с использованием тригонометрических базисных функций.
- Сформулированы общие принципы моделирования и расчета характеристик микро-/наноэлектромеханических детекторов модулированного терагерцевого излучения.
- Представлена схема наноэлектромеханического детектора модулированного терагерцевого излучения, работающего при комнатной температуре и характеризующегося исключительно высокой чувствительностью, низким уровнем шума и имеющего достаточно низкое время релаксации.

Научная и практическая ценность. Рассмотрены микро- и наноэлектромеханические (МЭМ/НЭМ) детекторы модулированного терагерцевого излучения как отдельный класс неохлаждаемых терагерцевых детекторов. Найдены характеристики ряда таких детекторов и впервые исследованы условия возникновения параметрической неустойчивости в МЭМ/НЭМ системах со связанными друг с другом механическим и плазменным резонаторами. Представлена схема нового НЭМ детектора, имеющего параметры чувствительности и мощности, эквивалентную шуму по крайней мере не хуже, чем у самых чувствительных и малошумящих неохлаждаемых детекторов — микроболометров. По параметру времени релаксации данный НЭМ детектор выигрывает у самых быстрых микроболометров 3-4 порядка, что открывает перспективы для его использования в системах коммуникации с автономными устройствами субмиллиметрового размера, обеспечивая ширину информационного канала порядка 0.1 Мбит/с.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Пороги возникновения параметрической неустойчивости в МЭМ/НЭМ детекторах достаточно велики, однако ее возникновение возможно при использовании совместно с детектором систем, усиливающих входящее излучение – антенн и/или линз.
- В случае небольших добротностей высокочастотного резонатора, параметрическая неустойчивость в системах, описываемых уравнениями типа емкостного датчика, может возникать при обоих знаках расстройки возбуждающего сигнала.
- МЭМ/НЭМ детекторы терагерцевого излучения могут иметь чувствительность порядка 10^6 В/Вт при мощности, эквивалентной шуму порядка 10^{-12} Вт/ $\sqrt{\text{Гц}}$, что соответствует наилучшим характеристикам терагерцевых микродетекторов, работающих при комнатной температуре.

1 Обзор некоторых типов микродетекторов ТГц излучения, работающих при комнатной температуре

Данная диссертация посвящена микро-/наноэлектромеханическим детекторам модулированного терагерцевого излучения, работающим при комнатной температуре, которые в силу своих параметров и характеристик могут быть использованы в качестве средств коммуникации с автономными электронными устройствами, субмиллиметрового размера. Характерными параметрами таких детекторов является комнатная рабочая температура, высокая чувствительность (сравнимая с чувствительностью других используемых в настоящее время микродетекторов, в том числе некоторых, работающих при гелиевых температурах [43,44]), малый размер (от нескольких сотен нанометров без антенны или до нескольких сотен микрометров с антенной) и относительно невысокая пропускная способность информационного канала (до 1 Мбит/с). К настоящему времени существуют следующие успешно применяемые на практике типы микроразмерных детекторов терагерцевого излучения, работающих при комнатной температуре:

- Микроболометры;
- Диоды Шоттки;
- Детекторы на основе полевых транзисторов.

В обзорной части диссертации будут кратко изложены принципы работы данных устройств и приведены их характеристики, найденные в публикациях последних лет. Это позволит определить место МЭМ/НЭМ детекторов терагерцевого излучения среди данных типов детекторов, которые потенциально могли бы использоваться для реализации систем коммуникации с автономными электронными устройствами субмиллиметрового размера.

1.1 Микроболометры

Принцип работы болометра основан на изменении сопротивления термочувствительного элемента при его нагревании в результате поглощения электромагнитного излучения. Элементарная теория такого устройства описывается простым калориметрическим уравнением

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha (T - T_0) + \eta I(t), \quad (1)$$

а также температурной функцией сопротивления болометра, которую при небольших изменениях температуры устройства удобно представить в виде приближенного соотношения

$$\frac{\Delta R}{R} = \beta \Delta T, \quad (2)$$

где C — теплоемкость устройства, T — его температура, t — время, T_0 — температура окружающей среды, α — коэффициент теплоотдачи в окружающую среду, $I(t)$ — интенсивность входящего излучения, η — коэффициент поглощения энергии излучения устройством, $\Delta R/R$ — относительное изменение сопротивления термочувствительного элемента, $\Delta T = T - T_0$ — изменение температуры устройства, β — температурный коэффициент сопротивления. Решив уравнение (1) в Фурье-пространстве, найдем амплитудно-частотную характеристику колебаний относительного сопротивления:

$$\frac{\Delta R_\omega}{R} = \beta \Delta T_\omega = \beta \frac{\eta}{\alpha} \cdot I_\omega \frac{\alpha/C}{i\omega + \alpha/C}, \quad (3)$$

из которой видно, что амплитуда колебаний сопротивления пропорциональна $\beta\eta/\alpha$, при том, что обратное время релаксации устройства $\tau^{-1} = \alpha/C$. Отсюда видно, что создание высокочувствительного, с малым временем релаксации и малошумящего болометра представляет собой сложную оптимизационную задачу. Так, при увеличении чувствительности прибора за счет выбора (или условий работы) материала с высокой терморезистивной константой β , ухудшаются шумовые характеристики. Увеличивая чувствительность путем улучшения термоизоляции (маленький параметр α), мы увеличим время релаксации. Уменьшая время релаксации за счет уменьшения теплоёмкости заставит нас сделать устройство существенно меньшего размера, а это ухудшит его шумовые характеристики. Типичные параметры болометров, работающих в терагерцевом диапазоне при комнатной температуре, созданных на основе различных материалов приведены в таблице 1.

Материал	β , $\% \cdot \text{K}^{-1}$	Разм., μm	NEP, $\text{pW}/\sqrt{\text{Hz}}$	R_V , kV/W	τ^{-1} , Hz	Ист.
VO_x	2.0	60	0.8	100	120	[46]
CMOS n-well	0.5	75	3.8	2.7	140	[47]
YBaCuO	3.2	60	200	10	1400	[48]
SWCNT films	2.94	1000	8200	0.136	1100	[49]
a-Si	2.8	12	8.1	37	75	[50]

Таблица 1: Характеристики терагерцевых микроболометров, созданных на основе различных функциональных материалов ($T = 300 \text{ K}$).

В настоящее время микроболометры размером до сотен микрометров главным образом применяются в качестве пикселей матриц в приложениях терагерцевой и ИК визуализации. Из приведенной таблицы видно, что в среднем параметры микроболометров, доступных на текущий момент таковы: размер порядка десятка микрометров, чувствительность — от единиц до сотен kV/W , отношение сигнал-шум — порядка $10 \text{ pW}/\sqrt{\text{Hz}}$, а время релаксации — порядка 10 миллисекунд. Значение последнего параметра накладывает существенные ограничения на область применения данных устройств. Если для приложений визуализации частоты обновления данных в 100 Гц (на один пиксель) достаточно, то для осуществления коммуникации, пусть и с устройством размером с песчинку, требуется большая пропускная способность информационного канала.

Тот же принцип работы, что и болометры имеют пироэлектрические детекторы ИК и ТГц диапазона. Активным элементом в этих устройствах является пироэлектрический материал, в котором имеется собственное электрическое поле, зависящее от температуры. Таким образом, пироэлектрический детектор, в отличие от болометра, не требует для работы источника постоянного напряжения, и при этом дает непосредственный отклик на попадающее в него излучение в виде напряжения на своих выводах. Тем не менее, характеристики наиболее эффективных пироэлектрических детекторов, которые также используются в матрицах терагерцевых и ИК-камер существенно отличаются от характеристик болометров приведенных в таблице 1, в том числе и по части времени релаксации [51].

1.2 Диоды Шоттки

Другими очень широко применяемыми детекторами миллиметрового и субмиллиметрового излучения являются диоды Шоттки (ДШ). В отличие от обычных диодов на основе pn -перехода, диоды Шоттки обладают существенно большим быстродействием, благодаря чему возможно их использование при частотах до нескольких терагерц [52, 53]. Диоды Шоттки имеют такое свойство за счет того, что транспорт заряда в них обусловлен главным образом термоэмиссией электронов через энерге-

тический барьер, возникающий в контакте металл-полупроводник. В обычных же диодах транспорт заряда существенным образом определяется процессом диффузии неосновных носителей, параметром быстроты которого является время рекомбинации электронов и дырок, которое имеет значение порядка миллисекунд для основных полупроводниковых материалов. На рисунке 1 показаны зонные диаграммы обычного и Шоттки диодов при положительном, нулевом и отрицательном смещении, из которых видно, что в последнем перенос заряда осуществляется одним видом носителей, где диффузия и рекомбинация играют несущественную роль.

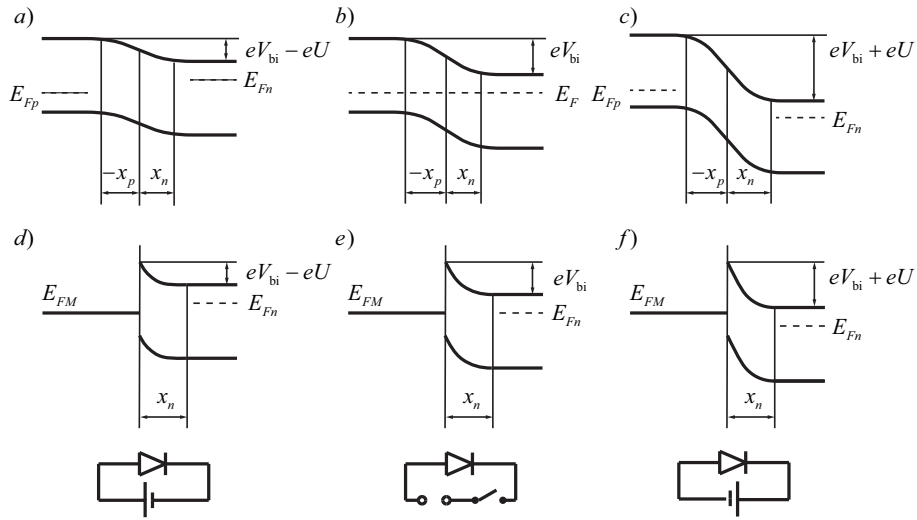
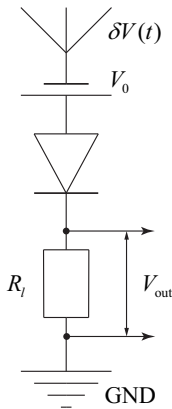


Рис. 1: Зонные диаграммы pn -перехода и контакта металл- n -полупроводник при (a/d) положительном, (b/e) нулевом и (c/f) отрицательном смещениях.

Таким образом, диод Шоттки является нелинейным элементом цепи, сохраняющим свои свойства вплоть до терагерцевых частот. При приложении напряжения к его концам $V(t) = V_0 + \delta V(t)$, где $\delta V = V_\omega e^{i\omega t} \ll V_0$, через него будет протекать ток



$$I(t) = I_0(V_0) + \text{Re}(Y_\omega V_\omega e^{i\omega t}) + \varepsilon \delta V^2(t) + \dots, \quad (4)$$

где $I_0(V_0)$ — зависимость тока через диод от постоянного приложенного напряжения (ВАХ), Y_ω — линейный адмитанс устройства в рассматриваемом частотном диапазоне, ε — коэффициент квадратичной нелинейности диода, определяемый кривизной ВАХ при данном напряжении смещения. Если этот элемент включить в цепь, показанную на рисунке слева, напряжение на нагрузочном резисторе можно представить в виде:

$$V_l(t) = \alpha V_0 + \text{Re}(\beta_\omega V_\omega e^{i\omega t}) + \gamma \delta V^2(t) + \dots, \quad (5)$$

При этом зависящая от амплитуды входящего переменного сигнала составляющая напряжения будет равна

$$V_{\text{out}} = \frac{\gamma V_{\omega}^2}{2}. \quad (6)$$

Данная схема представляет собой детектор излучения. Его чувствительность равна отношению выходного сигнала V_{out} к принимаемой мощности P_{in} . Последняя зависит от параметров используемой антенны и соотношения между ее входным импедансом и импедансом нагрузки. Однако, в любом случае справедлив тот факт, что напряжение на выходе антенны будет пропорционально амплитуде электрического поля в принимаемой ею волне, а принимаемая мощность будет пропорциональна интенсивности волны, т.е. квадрату электрического поля. В результате можно записать, что

$$P_{\text{in}} = \sigma V_{\omega}^2, \quad (7)$$

где σ — некоторый коэффициент пропорциональности. Тогда чувствительность детектора будет равна

$$R_V = \frac{V_{\text{DC}}}{P_{\text{in}}} = \frac{\gamma}{2\sigma}. \quad (8)$$

Уже из этого простого выражения видно, что высокочувствительный детектор терагерцевого излучения на основе диода Шоттки должен иметь высокую степень нелинейности ВАХ вплоть до рабочего диапазона частот, используемая в детекторе антенна должна иметь высокий коэффициент усиления и иметь импеданс, согласованный с нагрузкой (диодом и дополнительным нагрузочным сопротивлением R_l). Также, для получения максимальной чувствительности требуется оптимальный подбор параметров напряжения смещения V_0 , нагрузочного сопротивления R_l в выбранном частотном диапазоне. В таблице 2 представлены характеристики некоторых детекторов терагерцевого излучения на основе Диода Шоттки, представленных в литературе за последнее время.

Контакт	ω_{max} , GHz	Размер, μm	R_V , V/W	NEP, pW/ $\sqrt{\text{Hz}}$	Источник
Ti/CoSi ₂ -Si	860	10	300	30	[54, 55]
InGaAs/InP	1000	20	1000	~10	[56]
—	450	40	500	~10	[57]

Таблица 2: Характеристики некоторых детекторов на основе Диода Шоттки.

Проанализировав литературу, а также изучив ассортимент коммерчески доступных детекторов терагерцевого диапазона на основе диода Шоттки (ДДШ), можно отметить следующие их преимущества: малый размер (десятки микронметров, не

включая размер антенны), возможность работы при нулевом напряжении смещения, малое время релаксации (меньше наносекунды), относительно высокая чувствительность и низкие шумы при комнатной температуре (до нескольких kV/W и десятки $\text{pW}/\sqrt{\text{Hz}}$, соответственно). Отдельно можно отметить, что ДДШ работают в широкой полосе частот, ограниченной характеристиками используемой антенны и частотой отсечки диода. К недостаткам ДДШ можно отнести тот факт, что верхняя граница диапазона их рабочих частот в настоящее время ограничена значением 1-2 ТГц.

1.3 Детекторы на основе полевых транзисторов с высокой подвижностью электронов

Еще одним широко используемым классом детекторов терагерцевого излучения являются детекторы на основе полевых транзисторов с высокой подвижностью электронов. Исток и сток такого транзистора связывает плоский канал, заполненный двумерным электронным газом (2d-ЭГ) в котором могут распространяться плазменные волны терагерцевой частоты (см. рис. 2). Затвор транзистора частично экранирует заряды в канале, в результате чего спектр плазменных волн приобретает линейный вид:

$$\omega(\omega - i\gamma) = v_p^2 k^2, \quad v_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_S d}{\epsilon m^*}, \quad (9)$$

где γ — частота столкновений электронов в 2d-ЭГ, v_p — скорость плазменных волн, n_S — поверхностная концентрация электронов в канале, m^* — их эффективная масса, ϵ — эффективная диэлектрическая проницаемость, d — расстояние между каналом и затвором. Ввиду того, что в современных транзисторах частота электронных столкновений может быть доведена до значений менее 10^{12} s^{-1} , а концентрация свободных электронов имеет порядок 10^{12} cm^{-2} , канал такого транзистора длиной около микрометра представляет собой терагерцевый резонатор. Частота плазменного резонанса может быть отрегулирована путем изменения концентрации электронов n_S в результате подачи напряжения на затвор:

$$\epsilon n_S = \epsilon \Sigma_0 + \frac{V_G}{4\pi d}, \quad (10)$$

где Σ_0 — равновесная поверхностная концентрация электронов в канале при нулевом напряжении на затворе V_G .

Детектирование проходящего с антенны переменного сигнала в рассматриваемом устройстве осуществляется благодаря нелинейной динамике электронной плазмы в канале транзистора. Движение электронов в данном случае может быть описано в

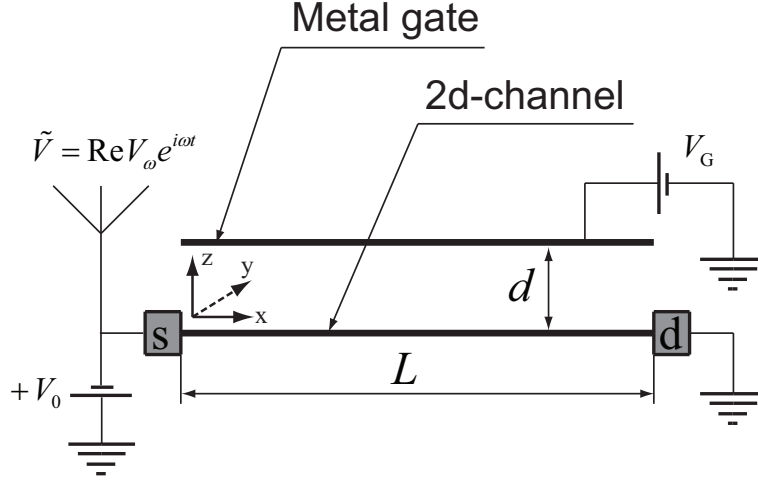


Рис. 2: Схема детектора терагерцевого излучения на основе полевого транзистора с высокой подвижностью электронов.

терминах гидродинамических уравнений [34, 58]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(-en_S + \sigma)u] = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{e}{m^*} E_x, \end{cases} \quad (11)$$

где σ — переменная во времени составляющая поверхностной плотности зарядов, u — их усредненная (гидродинамическая), E_x — x -компонента электрического поля в канале транзистора. Первое уравнение в данной системе выражает собой закон сохранения заряда, второе представляет собой уравнение Эйлера.

Подробный анализ системы уравнений (11) в случае геометрии и схемы подключения, показанной на рисунке 2, когда правый конец канала (сток) заземлен, т.е. имеет фиксированный потенциал, а к левому (истоку) подведен потенциал, имеющий как постоянную, так и переменную составляющую

$$V_s(t) = V_0 + \tilde{V}(t), \quad \tilde{V}(t) = \text{Re } V_\omega e^{i\omega t}, \quad (12)$$

выполнен в работе [59]. Суть работы данного устройства заключается в том, что ввиду нелинейной динамики электронной плазмы в канале транзистора, пространственное распределение заряда между истоком и стоком отличается от линейного, которое всегда наблюдается в электростатике, например, в случае электрода с неизменным вдоль своей длины поперечным сечением. Это различие может быть измерено в качестве добавки к разности потенциалов между истоком и стоком (независящей от времени). Наличие переменной составляющей потенциала на истоке также вносит вклад в изменение разности потенциалов между истоком и стоком (см. [59]), равную

$$\delta V_{sd} = \frac{|V_\omega|^2}{V_G} \frac{\omega_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2 - u_d/L)^2}, \quad \frac{\omega_0}{\gamma} \gg 1, \quad (13)$$

где $\omega_0 = \pi v_p/L$ — резонансная частота основной гармоники, u_d — постоянная составляющая скорости потока электронов вблизи стока, которая слабо отличается от средней скорости электронов в канале, равной $eV_0/(\gamma m^* L)$. Как видно из данного выражения, отклик детектора пропорционален квадрату амплитуды входящего сигнала, а значит пропорционален мощности, которая поглощается антенной. Также, детектор имеет такую особенность, что его отклик на переменный входящий сигнал растет с увеличением постоянного тока, протекающего через канал. Существует критическое значение тока, выше которого в детекторе возникает неустойчивость и он становится генератором терагерцевых колебаний [34, 60]. В таблице 2 представлены характеристики некоторых детекторов рассматриваемого типа.

Материал	ω_0 , GHz	R_V , V/W	NEP, nW/ $\sqrt{\text{Hz}}$	Источник
Al _{0.3} Ga _{0.7} As/GaAs	240	0.096	6500	[61]
Нанопроволоки InAs	292	1.5	2.5	[62]
AlGaAs/GaAs	1630	0.061	18	[63]
InGaAs/GaAs	1630	170	100	[64]

Таблица 3: Характеристики некоторых детекторов терагерцевого излучения на основе полевых транзисторов с высокой подвижностью электронов.

Из таблицы видно, что чувствительность и параметр NEP таких устройств сильно зависят от используемых материалов и технологий изготовления транзисторов (они влияют на концентрацию свободных носителей в 2d-ЭГ n_S и частоту их столкновений γ), выбора рабочей частоты (различают два режима работы детекторов, резонансный, когда рабочая частота находится в полосе основной моды плазменного резонанса и нерезонансный, когда рабочая частота ниже резонансной), а также от режима насыщения током, протекающим через канал транзистора.

1.4 Выводы

Проведя анализ параметров приведенных трех типов детекторов терагерцевого излучения, можно отметить следующие их преимущества:

- Чувствительность детекторов на основе микроболометров может достигать рекордной чувствительности, порядка 10^5 В/Вт, при комнатной температуре.
- Ширина информационного канала систем коммуникации на основе диода Шоттки ограничивается только частотой отсечки, которая у наиболее высокочастотных таких детекторов имеет порядок 10^{12} Гц.

- Детекторы на основе полевых транзисторов помимо высокой рабочей частоты (до нескольких ТГц) и высокой ширины информационного канала, соответствующей частотам порядка десятых долей ТГц, также могут быть легко интегрированы в уже существующие технологические процессы массового производства электронных микросхем.

К недостаткам данных устройств можно отнести следующее:

- Очень большое время релаксации микроболометров (порядка 10^{-2} секунды).
- Большие шумы и низкая чувствительность детекторов на основе полевых транзисторов (порядка сотен нВт/ $\sqrt{\text{Гц}}$ и единиц В/Вт, соответственно).

Также, общим недостатком всех приведенных типов детекторов является необходимость в усилении даваемого ими выходного сигнала, в результате чего конечные шумовые характеристики будут заметно ухудшены из-за шума усилителя, который должен быть также реализован в малом размере устройства, с которым осуществляется коммуникация.

Микроэлектромеханические детекторы модулированного терагерцевого излучения, как будет показано в дальнейшем, могут иметь чувствительность выше, чем у микроболометров, примерно такие же шумовые характеристики и время релаксации порядка микросекунды. Также, абсолютное значение даваемое ими отклика оказывается достаточно большим при относительно небольших интенсивностях падающего излучения, что дает больше возможностей для дальнейшего преобразования детектированного сигнала. Таким образом, можно ожидать, что на практике микроэлектромеханические детекторы модулированного терагерцевого излучения окажутся наиболее подходящими для использования в качестве средств коммуникации с электронными автономными устройствами субмиллиметрового размера.

2 Микроэлектромеханические детекторы модулированного терагерцевого излучения

Впервые идея детектора высокочастотных колебаний на основе полевого транзистора с колеблющимся затворным электродом была опубликована в 1967 году в работе Nathanson M.C. et al, [65]. Схема устройства показана на рисунке 3. Принцип его работы заключается в том, что входящий сигнал (Input Signal на рисунке) подается на конденсатор, образуемый затворным электродом (кантилевером) и плоской металлической пластиной (Input force plates), вызывая силу притяжения между ними, которая при наличии напряжения смещения (Polarization Voltage), в своем спектре имеет гармонику, соответствующую входящему сигналу.

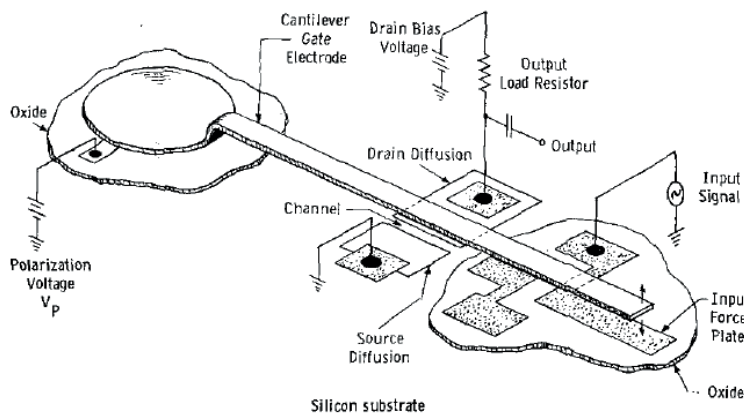


Рис. 3: Схема первого полевого транзистора с подвижным затворным электродом [65].

Если частота входящего сигнала попадает в полосу механического резонанса кантилевера, последний начинает сильно раскачиваться, влияя своим положением на проводимость канала транзистора (Channel на рисунке). Изменение проводимости канала фиксируется в виде наличия переменной составляющей напряжения на выходном сопротивлении (Output load resistor). Также, данное устройство может быть использовано в качестве демодулятора входящего сигнала, если он модулирован частотой, входящей в резонансную полосу механического резонанса. Детектирование (выделение модулирующего сигнала) происходит из-за квадратичной зависимости силы, возбуждающей кантилевер от величины входящего сигнала.

Данная схема была предложена в качестве варианта решения актуальной во времена написания работы [65] проблемы допусков технологических процессов при производстве высокочастотных резонаторов размером в десятки микрометров. Суть проблемы заключается в том, что при использовании технологических процессов того времени, резонансная частота серийно выпускаемого высокочастотного

ротного резонатора могла быть смещена относительно задаваемой по крайней мере на величину ширины полосы резонанса. При использовании резонаторов в качестве компонентов в определенных устройствах, такое смещение частоты являлось недопустимым. Решением в таком случае могли бы быть резонаторы с возможностью настройки частоты в процессе их эксплуатации. В силу резкой нелинейной зависимости силы притяжения между кантилевером и металлической пластиной, при наличии постоянного напряжения, приложенного между ними, частота малых колебаний кантилевера может быть отрегулирована в достаточно широком диапазоне, путем подбора необходимого значения напряжения.

Недавно было предложено использовать полевой транзистор с высокой подвижностью электронов с подвижным затворным электродом, работающий по похожему принципу [37]. В данном устройстве (см. рис. 4) модулированный терагерцевый сигнал подается к концам канала транзистора (истоку и стоку), который возбуждает колебания электронной плазмы в канале.

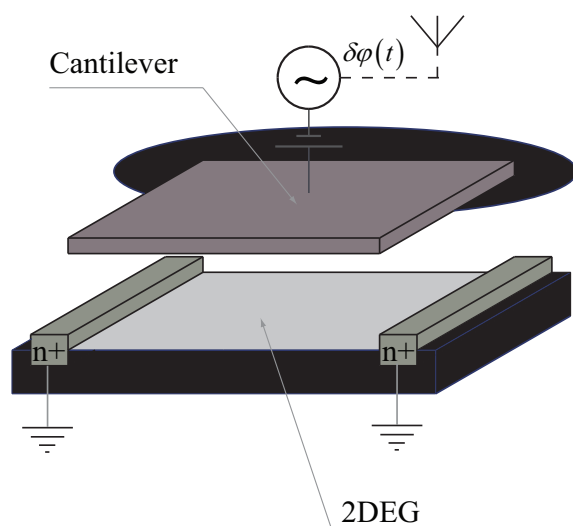


Рис. 4: Схема микроэлектромеханического детектора терагерцевого излучения на основе полевого транзистора с высокой подвижностью электронов.

Поскольку затвор сделан из материала с высокой проводимостью, он успевает экранировать заряды в канале также как это происходило бы в случае неподвижных зарядов. Таким образом, на затвор действует сила, пропорциональная квадрату амплитуды колебаний плотности заряда в канале, которая в свою очередь пропорциональна величине входящего сигнала с антенны. В результате, как и в схеме Натансона, затворный электрод может резонансно раскачиваться с частотой сигнала модуляции. При этом, смещение затвора может быть измерено по изменению величины электрической ёмкости между затвором и каналом. Таким образом, рассматриваемая конструкция представляет собой высокоинтегрированную систему, заключающую в себе сразу три элемента детектора: усилитель высокой частоты (плазменный резонатор),

нелинейный элемент (пандеромоторное взаимодействие между каналом и затвором), и усилитель низкой частоты (механический резонатор).

Данное устройство работает на частоте основного плазменного резонанса в канале транзистора, которая ограничена снизу частотой электронных столкновений в двумерном электронном газе (при более низких частотах плазменный резонанс имеет добротность меньше единицы), равной примерно 10^{12} s^{-1} и сверху некоторой максимальной частотой, большей, по крайней мере, нескольких ТГц, при которой длина канала должна быть настолько малой, что это влияет на динамику электронов в нем, например, вследствие краевых эффектов. Диапазон частот модулирующего сигнала ограничивается частотой механических колебаний затвора, максимальное значение которой для кремниевых кантилеверов находится в диапазоне от одной до нескольких сотен мегагерц. Чувствительность детектора, описанного в работе [37] составляла 0.1 A/W , при частоте плазменного резонанса 1.5 ТГц , частоте механического резонанса 100 МГц , его добротности, равной 10^3 , напряжении смещения между затвором и каналом, равном 3 Вольта , и условном значении глубины модуляции амплитудно модулированного сигнала, равной единице.

Позже были опубликованы другие варианты детекторов, работающих по такому же принципу, схематично показанные на рисунке 5 слева.

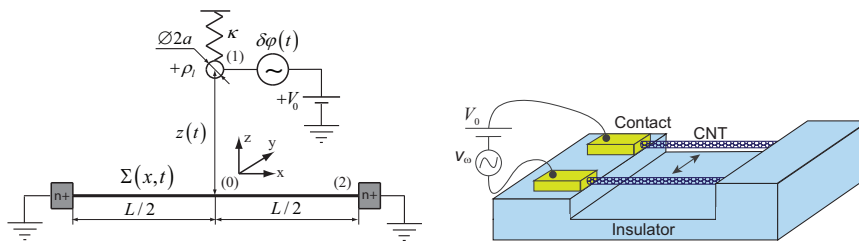


Рис. 5: МЭМ/НЭМ детекторы: (слева) на основе полевого транзистора с высокой подвижностью электронов с упругим цилиндрическим затворным электродом и (справа) на основе четверть-волнового отрезка двухпроводной линии из металлических одностенных углеродных нанотрубок.

В работе [38] рассматривался такой же терагерцевый детектор, как был описан выше с тем исключением, что его затворный электрод представляет собой тонкий стержень цилиндрической формы, который может быть выполнен в виде металлической наноструны или углеродной нанотрубки с металлической проводимостью. Преимуществом такой схемы является то, что тонкая нанонить имеет меньшую погонную массу, а также то, что ее можно механически натягивать, в результате чего собственная частота механических колебаний затвора может быть доведена до одного или нескольких гигагерц. Недостатком здесь может быть меньшая электрическая ёмкость между затвором и каналом, а значит меньший выходной ток при той же амплитуде колебаний затвора.

Детектор, изображенный на рисунке 5 справа, предложенный в работе [39], работает по тому же принципу, только плазменный резонанс у него возникает не в двумерном канале транзистора, а в углеродных нанотрубках. Как представлено в работе [66], нанотрубки с металлической проводимостью достаточно большой толщины (у которых периметр поперечного сечения много больше расстояния между атомами углерода $a \approx 0.142$ нм) имеют поверхностный импеданс вида Друде как в металлах в нормальных условиях. Ввиду этого, система из двух параллельных близко расположенных нанотрубок, изображенная на схеме детектора может быть представлена как двухпроводная линия с распределенными эффективными параметрами погонных электрической ёмкости, индуктивности и сопротивления. Основной резонанс в такой системе наступает когда длина нанотрубок равна четверти длины волны электронной плотности (или плазмона) с узлами тока на правых концах и пучностями на левых. Детектирование сигнала модуляции также производится за счет квадратичной зависимости силы притяжения между нанотрубками от амплитуды колебаний заряда на них и величины входящего сигнала. Далее, выделенный низкочастотный сигнал усиливается за счет механического резонанса.

Чувствительность двух вышеописанных детекторов, представленных в работах [38] и [39], оказалась примерно одинаковой, порядка 0.1 A/W , приблизительно такой же, как и в случае полевого транзистора с плоским затвором. В случае детектора на основе транзистора с цилиндрическим затвором это можно объяснить тем, что авторы рассмотрели слишком толстый затвор, радиусом в 100 нанометров, при котором преимущества данной схемы по части чувствительности остались нереализованными. В случае детектора на основе двух углеродных нанотрубок фактором, отрицательно сказывающимся на чувствительности оказалось присутствие контактного сопротивления $6.5 \text{ k}\Omega$ между нанотрубкой и подводимым переменный сигнал металлическим электродом, снижающим общую добротность плазменного резонатора до значений $1 \div 2$. В следующей главе диссертации будет представлена модифицированная схема подобного детектора, в которой контактное сопротивление не влияет на добротность плазменного резонанса.

2.1 Моделирование и расчет параметров МЭМ-детекторов

Как было сказано выше, МЭМ/НЭМ детекторы модулированного терагерцевого излучения по своей чувствительности сопоставимы с другими широко используемыми терагерцевыми детекторами, имеющими микрометровый и/или нанометровые размеры и работающими при комнатной температуре. Каждое из этих устройств представляет собой два связанных резонатора, плазменный (высокочастотный) и механический (низкочастотный). Связь между ними имеет нелинейный характер,

выраженный в том, что сила, раскачивающая механический резонатор пропорциональна квадрату амплитуды колебаний заряда в плазменном резонаторе с одной стороны, и с другой в том, что частота собственных колебаний плазменного резонатора зависит от меняющейся формы механического резонатора. Такими свойствами обладает множество систем, как электрических (например, емкостные/радиотехнические датчики смещения [67]), так и оптических (например, детектор малых смещений на основе интерферометра Фабри-Перо с подвижным упругим зеркалом [68] или тороидальные оптомеханические резонаторы [69]). Принцип работы таких устройств одинаков и может быть изложен на примере любого из них, например, емкостного детектора малых сил и смещений. Он представляет собой RLC-контур, подключенный к источнику переменного напряжения, частота которого примерно попадает в резонансную полосу контура. При этом, одна из пластин конденсатора подвижна и может упруго колебаться около своего положения равновесия (см. рисунок 6). Если на пластину действует некоторая достаточно малая сила, пластина отклонится, контур немного изменит свою резонансную частоту и в результате при постоянной частоте источника напряжения, амплитуды зарядов и токов в контуре изменятся, т.е. будет зафиксировано воздействие на пластину.

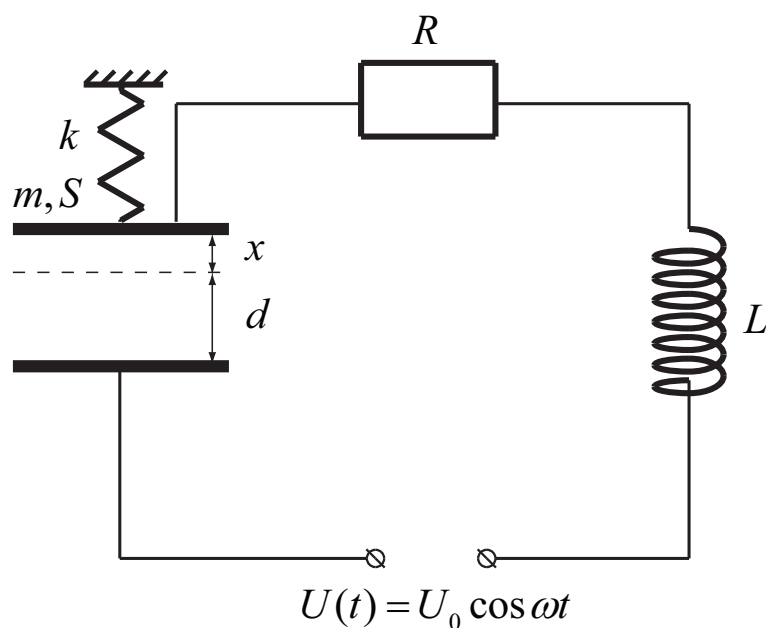


Рис. 6: Схема ёмкостного детектора малых сил и смещений.

Точное и математически обоснованное моделирование конкретного устройства, например, описанного в работе [37] (см. рис. 4), представляет собой достаточно громоздкую математическую задачу, требующую больших вычислительных ресурсов. Действительно, для этого необходимо решить систему из нескольких нелинейных уравнений в частных производных, описывающих возбуждение плазменных коле-

баний в системе с меняющейся со временем геометрией (вследствие механических колебаний в устройстве) и уравнений, описывающих механические деформации в системе под действием электрических сил. Данная задача сильно упрощается, если мы ограничиваемся приближенным решением, основанным на сведении распределенных резонаторов к элементарным осцилляторам, которое справедливо в случае высокочастотных колебаний малой амплитуды (как плазменных, так и механических). Как показывает непосредственный анализ [70–72], такие устройства могут быть описаны системой уравнений одного и того же вида, которая в случае емкостного датчика выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = -\frac{2\pi q^2}{S} \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C_0} \left(1 + \frac{x}{d}\right) = U(t), \end{cases} \quad (14)$$

где α — коэффициент затухания колебаний пластины (механического резонатора), M — ее масса, S — площадь, k — коэффициент упругости пружины, на которой закреплена пластина, x — отклонение подвижной пластины от исходного положения равновесия, в котором расстояние между ней и неподвижной пластиной равно d , L — индуктивность контура, R — омическое сопротивление, $C_0 = S/4\pi d$ — ёмкость конденсатора, образуемого пластинами при $x = 0$, q — заряд на пластинах, $U(t) = U_0 \cos \omega t$ — входной сигнал, подаваемый на датчик, U_0 — его амплитуда, ω — частота.

Получение системы уравнений вида (14) в случае других более сложных устройств, изображенных на рисунках 4 и 5, когда мы имеем дело с распределенными резонаторами подразумевает собой выполнение следующих действий:

- Выбор величин q и x , описывающих колебания эффективных элементарных осцилляторов, соответствующих плазменному и механическому резонаторам. Например, в случае колебаний электронной плазмы в канале транзистора, изображенного на рисунке 4 удобно использовать амплитуду колебаний заряда, протекающего между концами канала и затворным электродом. При колебаниях консольно закрепленного с обоих концов кантилевера удобно использовать специальным образом вычисляемую величину, пропорциональную его среднему прогибу.
- Вычисление линейного отклика эффективной величины q_ω , описывающей колебания плазменного резонатора в ответ на возбуждающее воздействие $\delta\varphi_\omega$, которым часто в рассматриваемых нами устройствах был сигнал переменного напряжения, генерируемый антенной, используемой в детекторе. Для одного случая удобно было в качестве воздействующей на детектор величины взять непосредственно электрическое поле падающей на детектор волны.

- Приближение передаточной функции $K(\omega)$, связывающей q_ω и $\delta\varphi_\omega$ зависимостью Лоренцевого вида вблизи выбранного резонанса. Такое приближение можно найти для любого резонатора, поскольку функция $K(\omega)$ обладает тем свойством, что комплексные резонансные частоты системы являются ее полюсами первого порядка. Если подобрать Лоренцевую функцию

$$\mathcal{L}(\omega, \omega_0, \gamma) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}, \quad (15)$$

имеющую полюс при той же частоте, умноженную на некоторую константу, можно добиться того, чтобы первые члены разложения в ряд Лорана функции $K(\omega)$ и ее приближения совпадали. Таким образом, найденное приближение будет хорошо описывать точную частотную зависимость по крайней мере в пределах полосы резонанса, при условии, что его добротность $Q = \omega_0/\gamma$ много больше единицы.

- Вычисление распределенной силы, действующей со стороны зарядов системы на кантилевер. Затем на основе ее формы и типа закрепления кантилевера можно получить эффективное уравнение, определяющее колебания его основной моды. Более старшие моды механических колебаний в рассматриваемых нами системах не рассматриваются.
- Вычисление зависимости собственной частоты плазменного резонатора от степени деформации механического резонатора, определяемой эффективной скалярной величиной x .

Также, для вычисления величины выходного сигнала рассматриваемых детекторов требуется найти зависимость от x электрической ёмкости между подвижным и неподвижным электродами (или другой величины, в зависимости от способа преобразования механических колебаний в выходной сигнал). В случае малых деформаций и возможности пренебречь краевыми эффектами, данная задача решается аналитически, путем разделения сложного конденсатора на множество соединенных параллельно простых плоских, для которых известно выражение для ёмкости. В результате, путем интегрирования можно получить некоторую среднюю емкость, равную искомой при малых x . Когда же необходим учет краевых эффектов, эту задачу можно решить численными методами, реализованными в известных программных пакетах [40].

В последующих главах на достаточно общих примерах будет представлена реализация перечисленных пунктов. После изложения таким образом используемого подхода к моделированию МЭМ/НЭМ детекторов терагерцевого излучения, в отдельной главе будут представлены результаты расчета характеристик некоторых таких устройств.

2.2 Чувствительность МЭМ-детекторов

Чувствительностью детектора называется отношение величины выходного сигнала детектора к потребляемой им мощности. В случае МЭМ/НЭМ детекторов выходной сигнал пропорционален амплитуде колебаний механического резонатора, т.е. можно записать:

$$Y(t) = \varepsilon_Y \cdot x(t), \quad (16)$$

где x — временная функция прогиба механического резонатора, Y — выходной сигнал, который может быть разного вида (напряжение, ток, интенсивность светового потока) в зависимости от выбранного способа преобразования механического сигнала, которое определяет значение коэффициента ε_Y .

Аналитический вид чувствительности в зависимости от основных параметров детекторов рассматриваемого типа, которыми являются добротности высокочастотного и низкочастотного резонаторов, а также соотношение между их собственными частотами, оказывается сходным для всех подобных устройств, включая емкостной датчик. Ввиду простоты системы уравнений (14), которая описывает емкостной датчик, а также наглядности входящих в нее параметров, вычислим чувствительность этого устройства, в случае, когда оно используется в качестве демодулятора электрического сигнала. Для удобства перепишем систему уравнений (14) с учетом обозначений

$$\gamma_m = \frac{\alpha}{M}, \quad \omega_m^2 = \frac{k}{M}, \quad \gamma_e = \frac{R}{L}, \quad \omega_e^2 = \frac{1}{LC_0}, \quad (17)$$

следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \gamma_m \dot{x} + \omega_m^2 x = -\frac{2\pi q^2}{MS} \\ \ddot{q} + \gamma_e \dot{q} + \omega_e^2 q \left(1 + \frac{x}{d}\right) = \omega_e^2 C_0 U(t). \end{cases} \quad (18)$$

Пусть на емкостной датчик подается модулированный сигнал

$$U(t) = U_0 (1 + m \cdot \cos \Omega t) \cos \omega t, \quad (19)$$

частотный спектр которого содержит три гармоники:

$$U(t) = U_0 \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} + \frac{m}{2} e^{i(\omega-\Omega)t} + \frac{m}{2} e^{i(\omega+\Omega)t} \right]. \quad (20)$$

Считая колебания $x(t)$ малыми, настолько, что собственная частота электрического

резонатора в результате них смещается на величину, меньшую ширины его резонансной полосы, можем записать решение для колебаний заряда:

$$q = q_0 \operatorname{Re} \left[G_e(x, \omega) e^{i\omega t} + \frac{m}{2} G_e(x, \omega - \Omega) e^{i(\omega - \Omega)t} + \frac{m}{2} G_e(x, \omega + \Omega) e^{i(\omega + \Omega)t} \right], \quad (21)$$

где $q_0 = C_0 U_0$, и

$$G_e(x, \omega) = \frac{\omega_e^2}{\omega_e^2 (1 + x/d) - \omega^2 + i\omega\gamma_e}. \quad (22)$$

С учетом того, что в рассматриваемых устройствах частота собственных колебаний механического резонатора много меньше ширины резонансной полосы электрического резонатора, можно считать, что

$$G_e(x, \omega - \Omega) \approx G_e(x, \omega + \Omega) \approx G_e(x, \omega). \quad (23)$$

Тогда, подставив найденное выражение $q(t)$ в правую часть первого уравнения системы (18), можем найти решение $x(t)$, описывающее колебания механического резонатора:

$$x(t) = \frac{\pi}{2} \frac{m \cdot q_0^2}{M\omega_m^2 S} |G_e(x, \omega)|^2 \times \operatorname{Re} [G_m(\Omega) e^{i\Omega t}], \quad (24)$$

где

$$G_m(x, \Omega) = \frac{\omega_m^2}{\omega_m^2 - \Omega^2 + i\Omega\gamma_m}. \quad (25)$$

Максимальная амплитуда механических колебаний достигается при условии попадания частоты несущего сигнала в резонанс электрического резонатора, а частоты модулирующего сигнала — в резонанс механического, и равна

$$x_0 = \frac{\pi}{2} Q_e^2 Q_m \frac{m \cdot q_0^2}{M\omega_m^2 S}, \quad (26)$$

где $Q_e = \omega_e/\gamma_e$ и $Q_m = \omega_m/\gamma_m$ — добротности электрического и механического резонаторов, соответственно. Заметим, что для данного устройства, существует некоторая максимальная амплитуда механических колебаний, выше которой на движение резонатора начинают оказывать существенное влияние различные нелинейные эффекты, такие как уход осциллятора в область другого фазового центра колебаний, биение резонатора о другие элементы конструкции устройства, и пр. Найдя предельную амплитуду колебаний механического резонатора, используя формулу (26), можно оценить минимальную величину амплитуды входящего сигнала, при которой она может

быть достигнута. В случае МЭМ/НЭМ детекторов и емкостного датчика, такая амплитуда с точностью до множителя порядка единицы соответствует зазору между взаимодействующими электродами, из которых один или оба, в зависимости от конструкции устройства, совершают колебания. Положив $x_0 = d$, запишем выражение для максимального q_0 в следующем виде:

$$[q_0^2]_{\max} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \frac{S \cdot M \omega_e^2 d}{n^2 Q_e^2 Q_m}, \quad (27)$$

где $n = \omega_e/\omega_m$ — отношение собственной частоты электрического резонатора к собственной частоте механического.

Зная временную зависимость прогиба механического резонатора, для используемого способа снятия выходного сигнала, можно получить его величину, при помощи соотношения (16). Далее, для определения чувствительности детектора, необходимо вычислить потребляемую им мощность. Она в рассматриваемом случае может быть разделена на следующие составляющие: мощность потерь на трение в механическом резонаторе P_m , мощность омических потерь в электрической цепи P_e , и мощность, уносимая излучаемыми электрической схемой электромагнитными волнами P_{rad} , которой мы пренебрежем, считая, что в рассматриваемом частотном диапазоне схема излучает мало. Первые две составляющие выражаются следующим образом:

$$P_m = M \gamma_m \langle \dot{x}^2 \rangle, \quad P_e = L \gamma_e \langle \dot{q}^2 \rangle, \quad (28)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по времени. Произведя вычисления, получим следующие значения составляющих мощности в условиях двойного резонанса ($\Omega = \omega_m$ и $\omega = \omega_e$):

$$P_m = \frac{\pi^2}{8} Q_e^4 Q_m \frac{m^2 q_0^4}{M \omega_m S^2}, \quad P_e = 2\pi Q_e \frac{\omega_e q_0^2 d}{S}. \quad (29)$$

В выражении для P_e мы пренебрегли малым вкладом боковых гармоник входного сигнала, поскольку $m^2 \ll 1$. Сравним мощности, рассеиваемые в механическом и электрическом резонаторах, вычислив их отношение:

$$\frac{P_m}{P_e} = \frac{\pi}{16} Q_e^3 Q_m n \frac{m^2 q_0^2}{M \omega_e^2 S d}. \quad (30)$$

Из него видно, что при малой величине входного сигнала всегда можно добиться того, чтобы рассеиваемая в механическом резонаторе мощность была много меньше, чем рассеивается в электрическом. Но даже если в качестве амплитуды входящего сигнала мы возьмем ее максимально допустимое при работе детектора значение, определяемое выражением (27), все равно полученное отношение будет много меньше единицы:

$$[P_m/P_e]_{\max} = \frac{Q_e}{8n}, \quad (31)$$

т.к. в случае рассматриваемых нами устройств ширина электрического резонанса (γ_e) всегда много больше собственной частоты механического резонанса (ω_m).

Далее, зная величину выходного сигнала детектора и потребляемую мощность, можем найти его чувствительность:

$$R_Y = \frac{1}{4} n^2 Q_e Q_m \frac{m \varepsilon_Y}{M \omega_e^3 d}. \quad (32)$$

Это выражение, а также выражения (27), (29), (30) и (31) имеют такой же вид зависимости от параметров Q_m , Q_e , n и m в случае МЭМ/НЭМ детекторов, работающих по такому же принципу, вне зависимости от диапазона, в который попадают частоты ω_m и ω_e .

2.3 Параметрическая неустойчивость в МЭМ-детекторах

В предыдущих параграфах отмечалось, что все рассматриваемые в диссертации МЭМ/НЭМ детекторы модулированного терагерцевого излучения, схемы которых приводились в разделе 2, в результате сведения распределенных резонаторов (плазменного и механического) к элементарным осцилляторам, описываются такой же системой уравнений (14), как и ёмкостной датчик (см. рисунок 6).

Общим для всех подобных устройств является то, что при изменении положения механического осциллятора (геометрии системы), электрические колебания выходят на новый стационарный режим не мгновенно, а с задержкой τ , определяемой временем релаксации электрического резонатора. В такой ситуации колебания пластины можно описать уравнением с запаздывающим аргументом:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = -F(x(t - \tau)), \quad (33)$$

где $F(x)$ — сила, действующая на механический осциллятор, которая в данном приближении явно зависит только от положения осциллятора x . Во всех рассматриваемых нами случаях τ много меньше периода колебаний пластины, поэтому можно разложить в ряд Тейлора функцию F по τ лишь до члена первого порядка:

$$F(x(t - \tau)) \approx F(x) - \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} \tau. \quad (34)$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, получим:

$$\ddot{x} + \left(\gamma + \frac{\partial F}{\partial x} \tau \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = -F(x). \quad (35)$$

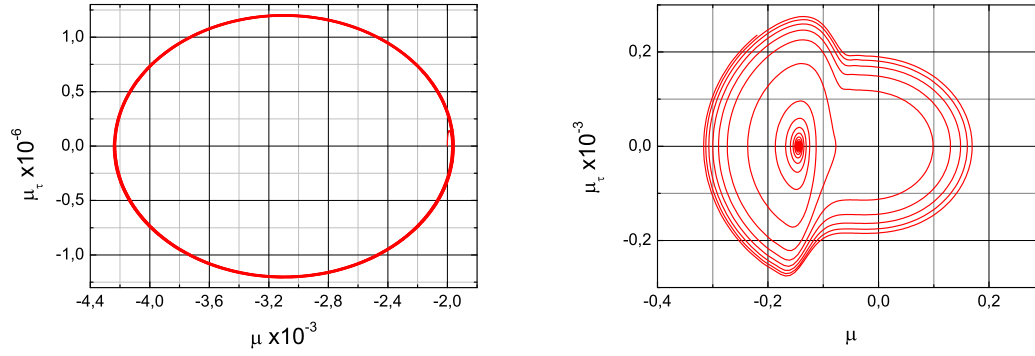


Рис. 7: Фазовые портреты колебаний низкочастотного резонатора при амплитуде входящего сигнала равной (слева) пороговому (при заданной расстройке) и выше нее (справа). По оси абсцисс представленных графиков отложена безразмерная координата осциллятора $\mu = x/d$, по оси ординат — его безразмерная скорость $\mu_\tau = \dot{x}/\omega d$.

Из последнего уравнения видно, что поскольку производная $\partial F/\partial x$ может в принципе иметь сколь угодно большое как положительное, так и отрицательное значение, может оказаться так, что сумма в скобках будет иметь нулевое или отрицательное значение, т.е. в системе “исчезнет” затухание или наступит генерация. Попадание в такой режим работы детектора определяется пороговым значением амплитуды сигнала, возбуждающего высокочастотный резонатор и разностью между его частотой и собственной частотой резонатора (расстройкой). На рисунке 7 показаны фазовые портреты движения механического осциллятора в случаях амплитуды возбуждающего сигнала в точности равной пороговой (слева) и когда амплитуда выше (справа). Во втором случае видно, что колебания выходят на некоторый предельный цикл.

Приближенный метод нахождения порога неустойчивости

Далее, на примере ёмкостного датчика приведем приближенную оценку пороговой амплитуды входящего переменного сигнала U_0 , при которой в нем возникает параметрическая неустойчивость. Для удобства введем следующие обозначения:

$$\mu = \frac{x}{d}, \quad q_0 = C_0 U_0, \quad \gamma_m = \frac{\alpha}{M}, \quad \omega_m^2 = \frac{k}{M}, \quad \gamma_e = \frac{R}{L}, \quad \omega_e^2 = \frac{1}{LC_0}. \quad (36)$$

Тогда система(14) переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{\mu} + \gamma_m \dot{\mu} + \omega_m^2 \mu = -\frac{2\pi q^2}{MSd} \\ \ddot{q} + \gamma_e \dot{q} + \omega_e^2 q (1 + \mu) = \omega_e^2 q_0 \cos \omega t. \end{cases} \quad (37)$$

Решим второе уравнение системы для постоянного μ :

$$q = \text{Re} [q_0 G_e (\mu, s) e^{i\omega t}], \quad G_e = \frac{1}{1 + \mu - s^2 + is/Q_e}, \quad s = \frac{\omega}{\omega_e}, \quad Q_e = \frac{\omega_e}{\gamma_e}. \quad (38)$$

Далее, усредним по “быстрому” времени величину $q(t)$ и подставим ее в уравнение для механического осциллятора:

$$\begin{aligned} \ddot{\mu} + \gamma_m \dot{\mu} + \omega_m^2 \mu &= -K \cdot F(\mu(t - \tau), s), \\ K &= \frac{2\pi}{MSd} \frac{q_0^2}{2}, \quad F(\mu, s) = |G_e(\mu, s)|^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Учитывая, что $\tau \sim \gamma_e^{-1}$, т.е. $\tau \ll \omega_m^{-1}$, можно разложить в ряд Тейлора функцию F по τ :

$$F(\mu(t - \tau), s) \approx F(\mu, s) - \frac{\partial F}{\partial \mu} \dot{\mu} \tau. \quad (40)$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, при этом полагая $\tau = \gamma_e^{-1}$, получим:

$$\ddot{\mu} + \left(\gamma_m - K \cdot \frac{\partial F}{\partial \mu} \gamma_e^{-1} \right) \dot{\mu} + \omega_m^2 \mu = K \cdot F(\mu, s). \quad (41)$$

Из этого уравнения видно, что при положительной производной $\partial F/\partial \mu$ и значениях K выше порогового, можно добиться отрицательного декремента колебаний. Минимальное возможное пороговое значение амплитуды достигается когда производная $\partial F/\partial \mu$ имеет максимально большое по модулю положительное значение. Рассмотрим выражение для $F(\mu, s)$:

$$F(\mu, s) = \frac{1}{(1 - \mu - s^2)^2 + s^2/Q_e^2}; \quad (42)$$

Варьируя параметр s , представляющий собой нормированную частоту внешнего сигнала, можно сделать так, чтобы максимум производной $\partial F/\partial \mu$ достигался при $\mu = 0$, при этом, если внешняя частота изначально была равна резонансной, т.е. $s = 1$, потребуется совсем небольшое изменение этого параметра, в пределах $1/Q_e$. Поэтому для оценки максимума $\partial F/\partial \mu$ можно положить $s = 1$. Далее, решив уравнение уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left\{ \frac{1}{\mu^2 + \frac{1}{Q_e^2}} \right\} = 0, \quad (43)$$

из которого получим:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{3}Q_e}, \quad \max_{\mu} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \mu} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{8} Q_e^3. \quad (44)$$

Таким образом, пороговое значение значение U_0 , при котором может возникнуть пороговая неустойчивость определяется соотношением:

$$C_0^2 U_0^2 = q_0^2 = \frac{8}{\sqrt{3}\pi} \frac{S \cdot M \omega_e^2 d}{n Q_e^4 Q_m} \quad (45)$$

где $n = \omega_e/\omega_m$ — отношение частот электрического и механического резонаторов, $Q_m = \omega_m/\gamma_m$ — добротность механического резонатора.

Вычисление порога неустойчивости методом связанных колебаний

Более точная оценка порога возникновения параметрической неустойчивости в системе уравнений (14) может быть проделана с помощью метода связанных колебаний (см. например [73]). Есть публикации, в которых исследовались подобные системы с использованием данного метода [68, 69, 74], однако в них пренебрегалось смещением положение равновесия механического осциллятора под действием усредненной пондеромоторной силы, действующей на него. Действительно, из фазового портрета слева на рисунке 7 видно, что центр эллипса смещен относительно $x = 0$ в отрицательную область. Такое приближение в случае оптомеханических систем часто бывает оправданным, поскольку силы электромагнитного давления обычно бывают очень малы для того чтобы заметно сместить положение равновесие механической системы, а сам эффект возникновения параметрической неустойчивости проявляется за счет очень большой добротности оптических резонаторов. В данной диссертации же рассматриваются МЭМ и НЭМ системы, в которых добротность плазменных микрорезонаторов не так велика и для точного определения порога неустойчивости необходимо принять во внимание также и смещение положения равновесия механического резонатора. Поэтому далее будут приведены результаты оценки порога неустойчивости системы (14) методом связанных колебаний также с учетом и этого фактора.

Для удобства последующих выкладок выполним следующую замену переменных в системе (37):

$$\begin{aligned} \tau = \omega t, \quad \mu = \frac{x}{d}, \quad \rho = \frac{q}{q_0}, \quad q_0 = \sqrt{\frac{MSd}{2\pi}}, \\ \tilde{\beta}_1 = \frac{\gamma_m}{2\omega}, \quad \tilde{\omega}_1 = \frac{\omega_m}{\omega}, \quad \tilde{\beta}_2 = \frac{\gamma_e}{2\omega}, \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{\omega_e}{\omega}, \end{aligned} \quad (46)$$

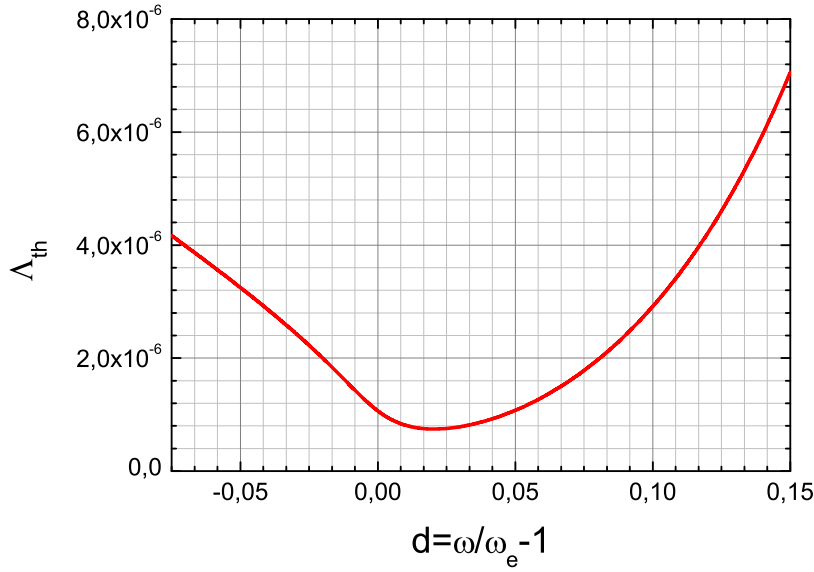


Рис. 8: Зависимость безразмерной пороговой амплитуды возбуждающего сигнала Λ_{th} от расстройки d при следующих параметрах системы: отношение частоты электрического резонанса к частоте механического $n = 15 \times 10^3$, добротности механического и электрического резонаторов $Q_1 = 10^4$ и $Q_2 = 10$, соответственно.

в результате получим обезразмеренную систему уравнений

$$\begin{cases} \mu_{\tau\tau} + 2\tilde{\beta}_1\mu_\tau + \tilde{\omega}_1^2\mu = -\rho^2 \\ \rho_{\tau\tau} + 2\tilde{\beta}_2\rho_\tau + \tilde{\omega}_2^2\rho(1 + \mu) = \Lambda \cos \tau, \end{cases} \quad (47)$$

в которой Λ имеет смысл безразмерной амплитуды возбуждающего сигнала, которая выражается через параметры исходной системы как

$$\Lambda = C_0 U_0 \tilde{\omega}_2^2 \sqrt{\frac{2\pi}{M\omega^2 S d}}. \quad (48)$$

К такой же обезразмеренной системе (47) можно свести в конечном итоге описание любого из рассматриваемых МЭМ/НЭМ детекторов модулированного терагерцевого излучения. Данная система, как видно, имеет 5 независимых параметров. При этом Λ является параметром, который имеет предельное значение для данной частоты внешнего сигнала ω , выше которого в системе наступит параметрическая неустойчивость. Если мы каким-либо образом найдем зависимость $\Lambda_{th}(\omega)$ пороговой амплитуды от частоты и найдем ее минимум, будем иметь два значения, Λ_{min} и ω_{extr} , зависящих от трех независимых параметров системы (47). В качестве таких параметров удобно взять добротности резонаторов Q_1 и Q_2 , а также отношение n частоты электрического резонанса к частоте механического. Выразим параметры системы через следующие новые безразмерные величины:

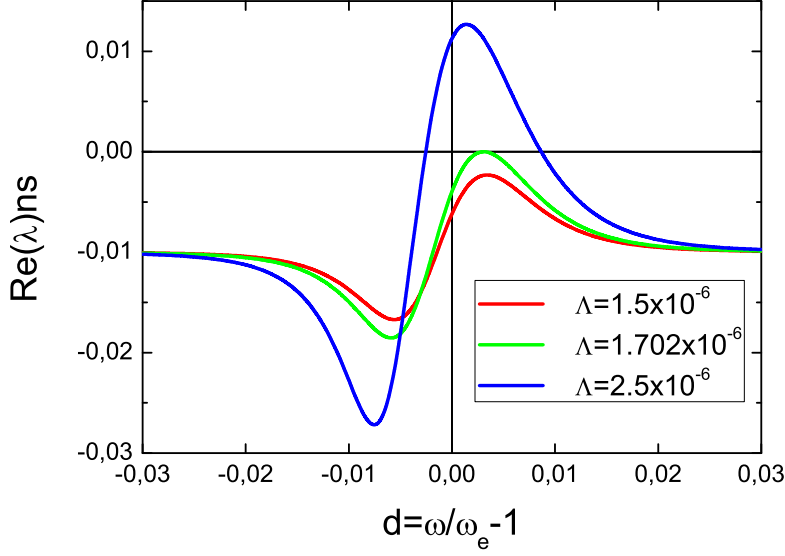


Рис. 9: Зависимость декремента затухания колебаний механического резонатора от расстройки между частотой возбуждающего сигнала и собственной частотой электрического резонатора при параметрах системы: $n = 1000$, $Q_1 = 50$, $Q_2 = 50$.

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{\omega}{\omega_e}, & Q_1 &= \frac{\omega_m}{\gamma_m}, & Q_2 &= \frac{\omega_e}{\gamma_e}, & n &= \frac{\omega_e}{\omega_m}, \\
 \tilde{\omega}_1 &= \frac{1}{ns}, & \tilde{\beta}_1 &= \frac{1}{2Q_1 ns}, & \tilde{\omega}_2 &= \frac{1}{s}, & \tilde{\beta}_2 &= \frac{1}{2Q_2 s},
 \end{aligned} \tag{49}$$

где s представляет собой частоту внешнего сигнала, нормированную на собственную частоту электрического резонатора, при этом величина $d = s - 1$ представляет собой нормированную расстройку между внешним сигналом и электрическим резонатором. Пороговое значение амплитуды сигнала входящего переменного напряжения можно выразить, зная Λ :

$$C_0^2 U_0^2 = \frac{M\omega^2 S d}{2\pi\tilde{\omega}_2^4} \times \Lambda^2, \tag{50}$$

что с учетом того, что $\omega \sim \omega_e$ и $\tilde{\omega}_2 \sim 1$ имеет такой же вид, как и выражение (45), полученное приближенным способом.

Точный анализ системы уравнений (47) приведен в приложении А.1. Здесь же будут представлены результаты проделанных вычислений. На рисунке 8 показана зависимость порогового значения Λ_{th} от нормированной расстройки d , при котором наступает параметрическая неустойчивость. Величина Λ_{th} получается для данного значения частоты возбуждения ω из условия, что инкремент затухания колебаний механического резонатора $\text{Re}\lambda$ должен быть равен нулю, λ в данном случае — ко-

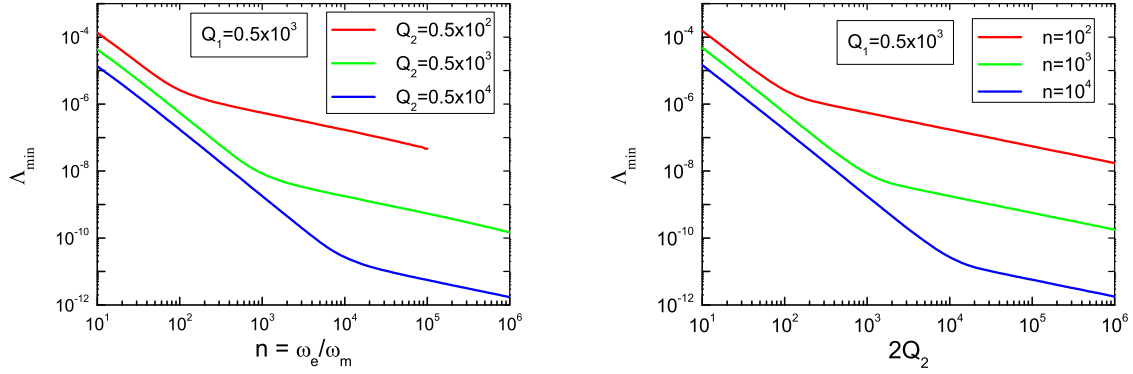


Рис. 10: Зависимости минимального порогового значения Λ от отношения n частоты электрического резонатора к частоте механического (слева) и от добротности электрического резонатора (справа).

эффицент в показателе комплексной экспоненты в частном решении для механического резонатора:

$$\mu = \text{Re} [\mu_0 e^{\lambda\tau}]. \quad (51)$$

На рисунке 9 показаны зависимости безразмерного инкремента колебаний $\text{Re}\lambda$ от безразмерной расстройки d при различных значениях Λ . Из него видно, что при рассчитанной для данных параметров n , Q_1 и Q_2 минимальном пороговом значении $\Lambda_{\min} = 1.702 \cdot 10^{-6}$ кривая зависимости инкремента от расстройки касается оси абсцисс. При более высоком значении Λ она для некоторого диапазона расстроек выходит в положительную область, а для $\Lambda < \Lambda_{\min}$ инкремент колебаний отрицательный при любой расстройке. Заметим, что для больших расстроек, выходящих из резонансной полосы электрического резонатора инкремент механических колебаний стремится к отрицательному значению, какое имеет место при свободных колебаниях механического резонатора. Действительно, инкремент в таком случае равен $-\tilde{\beta}_1$, что при параметрах для которых построены графики равно $-0.01 \cdot ns$.

На рисунке 10 также приведены зависимости Λ_{\min} от n при постоянных параметрах Q_1 и Q_2 , а также от Q_2 при постоянных Q_1 и n . Из данных графиков видно, что принципиально различными являются случаи, когда частота механического резонатора лежит в пределах резонансной полосы электрического резонатора ($n > 2Q_2$) и вне ее ($n < 2Q_2$), с достаточно большой степенью точности можно установить, что

$$\Lambda_{\min} \propto \begin{cases} n^{-0.5} Q_1^{-0.5} Q_2^{-2}, & \frac{1}{n} < \frac{1}{2Q_2}, \\ n^{-2} Q_1^{-0.5} Q_2^{-0.5}, & \frac{1}{n} > \frac{1}{2Q_2}. \end{cases} \quad (52)$$

Первый случай согласуется с ранее полученной в простом приближении форму-

лой (45). Излом зависимости порогового значения амплитуды возбуждающего сигнала от добротности высокочастотного резонатора предсказывался и экспериментально наблюдался в работе [75]. Однако, соотношения, аналогичные (52) в ней получались как крайние случаи, а сама зависимость с изломом получалась путем усреднения экспериментальных данных. Представленные же зависимости на рисунке 10 являются точными результатами расчета, справедливого при любых параметрах n , Q_1 и Q_2 . Таким образом, можно утверждать, что в диссертации проведено полное исследование системы уравнений, описывающей МЭМ/НЭМ детекторы модулированного терагерцевого излучения на предмет возникновения параметрической неустойчивости.

О параметрической неустойчивости в МЭМ-детекторах

Как было отмечено ранее, микроэлектромеханические детекторы модулированного терагерцевого излучения могут быть описаны системой уравнений такого же вида, как ёмкостной датчик (14). Таким образом, для таких устройств существует пороговое значение амплитуды входящего сигнала, при котором в них возникают низкочастотные колебания механического резонатора даже в отсутствие модуляции входящего сигнала. Параметры НЭМ детекторов таковы, что частота колебаний механического осциллятора во всех рассматриваемых случаях много меньше ширины резонансной полосы рабочего резонанса плазменного осциллятора, т.е. $\gamma_e \gg \omega_m$, или $n \gg 2Q_2$. При таких условиях для минимального порогового значения Λ_{\min} справедлива первая аппроксимация, представленная в выражении (52), которая хорошо описывается приближенной формулой (45). В результате, более точный способ вычисления порогов неустойчивости на основе метода связанных колебаний мог бы нам понадобиться, если бы мы имели дело с колебаниями механического осциллятора с частотой выше 0.5 ТГц. Такие частоты соответствуют изгибным колебаниям слоев углерода в многослойном графене, но в данной диссертации они не рассматриваются.

Вычисленные минимальные значения порогов неустойчивости для детектора на основе полевого транзистора с высокой подвижностью электронов с плоским [37] и цилиндрическим [38] затворными электродами оказались 700 и 5 мВ, соответственно. Такое малое значение во втором случае было получено за счет того, что подразумевалось, что в качестве затворного электрода в транзисторе используется одностенная углеродная нанотрубка с металлической проводимостью, которая имеет очень маленькую погонную массу. Чтобы понять, насколько полученные значения являются реализуемыми на практике, в первую очередь их следует сравнить с характерными величинами амплитуды переменного напряжения, даваемого антеннами терагерцевого диапазона, которые должны использоваться вместе с рассматриваемым детек-

тором. С точностью до порядка величины, можно считать амплитуду выходного напряжения антенны равной произведению амплитуды электрического поля падающей на антенну волны, на характерный размер антенны. В случае простейшей дипольной антенны этот размер равен половине длины волны, что для волны терагерцевой частоты соответствует приблизительно 150 мкм. Амплитуды электрического поля, падающие на такую антенну и даваемые выходное напряжения 700 и 5 мВ равны соответственно 50 и 0.3 В/см, интенсивности излучения, соответствующие таким амплитудам равны 3000 и 0.1 мВт/см². В случае более легкого затвора из углеродной нанотрубки диаметром в несколько нанометров величина пороговой интенсивности падающего излучения представляется вполне достижимой на практике.

Тем не менее, если рассматривать параметрическую неустойчивость в МЭМ/НЭМ детекторах как нежелательное явление, которое препятствует их стабильной работе, необходимо сравнить порог возникновения параметрической неустойчивости с характерным максимальным значением амплитуды входного сигнала, который в принципе может принять детектор. Данный предел амплитуды входящего сигнала определяется максимальным значением амплитуды колебаний механического осциллятора, при котором он начинает сталкиваться с другими элементами конструкции устройства. В разделе 2.2 мы получили выражение (см. формулу (27)) для этой амплитуды в случае детектора на основе ёмкостного датчика. Как можно будет убедиться в дальнейшем, зависимость этой величины, а также порога возникновения параметрической неустойчивости от основных параметров рассматриваемых систем Q_m , Q_e , n и m оказывается одной и той же для всех подобных устройств, к которым относятся и МЭМ/НЭМ детекторы. При этом отношение порога неустойчивости к максимальной амплитуде входного сигнала, который может принять детектор является безразмерной функцией, зависящей от этих четырех параметров, а также, возможно, от других безразмерных величин, характеризующих геометрию устройства. На примере емкостного датчика мы видим следующее:

$$[q_0^2]_{\text{th}} = \frac{8}{\sqrt{3}\pi} \frac{S \cdot M\omega_e^2 d}{nQ_e^4 Q_m}, \quad [q_0^2]_{\text{max}} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \frac{S \cdot M\omega_e^2 d}{n^2 Q_e^2 Q_m}, \quad \frac{[q_0^2]_{\text{th}}}{[q_0^2]_{\text{max}}} = \frac{4m}{\sqrt{3}} \frac{n}{Q_e^2}. \quad (53)$$

С учетом вышесказанного, а также того, что в рассматриваемых терагерцевых МЭМ/НЭМ детекторах $n \gtrsim Q_e^2$, а в качестве глубины модуляции мы берем условное значение $m = 0.1$, можно утверждать, что в таких устройствах, при их работе в качестве демодулятора, возникновение параметрической неустойчивости маловероятно. Тем не менее, при облучении мощным монохроматическим терагерцевым излучением устройств с легким и колеблющимся с высокой частотой (выше 1 ГГц) кантилевером, возможно параметрическое возбуждение механических колебаний.

2.4 Выводы

- МЭМ/НЭМ детекторы модулированного терагерцевого излучения по параметру чувствительности сравнимы и даже превосходят детекторы других типов, работающих при комнатной температуре.
- Их малый размер, высокая чувствительность и относительно небольшая пропускная способность информационного канала (от 10^3 до 10^6 бит/с) делают возможным их использование в качестве средств коммуникации с автономными электрическими устройствами субмиллиметрового размера.
- Независимо от конкретного вида терагерцевого МЭМ/НЭМ детектора, зависимости его характеристик от трех основных параметров (добротностей механического и плазменного резонаторов, а также отношения собственной частоты плазменного резонатора к собственной частоте механического) являются одними и теми же.
- В некоторых НЭМ детекторах, характеризующихся малой массой механического резонатора и высокой его собственной частотой колебаний возможно параметрическое возбуждение механического резонатора при относительно небольшой интенсивности принимаемого детектором терагерцевого излучения.
- В случае, когда НЭМ детектор работает в режиме демодулятора, параметрическая неустойчивость не может проявиться ввиду малой интенсивности принимаемого детектором излучения.
- Параметрическая неустойчивость в МЭМ/НЭМ детекторах может возникать как при положительных, так и при отрицательных величинах расстройки между частотой возбуждающего монохроматического сигнала и частотой собственных колебаний высокочастотного резонатора.

3 Расчет сосредоточенных параметров распределенных резонаторов, описываемых локальными уравнениями

Выше мы говорили, что непосредственное совместное решение уравнений электромагнетизма, гидродинамики электронный плазмы и механики сплошной среды, которые описывают МЭМ/НЭМ детекторы терагерцевого излучения, представляет собой очень громоздкую задачу, требующую большого вычислительного времени. Можно существенно упростить процесс моделирования таких устройств, используя приближенный подход, основанный на сведении распределенных резонаторов, входящих в схемы рассматриваемых устройств, к элементарным осцилляторам. Основная идея этого подхода заключается в том, что амплитудно- и фазо- частотные характеристики, получаемые из эффективного уравнения колебаний элементарного осциллятора должны совпадать с таковыми характеристиками исходного распределенного резонатора по крайней мере в пределах ширины выбранного резонанса. В первом разделе этой главы будет показано, что комплексная функция отклика любого резонатора вблизи любого из своих резонансов, в пределах ширины резонанса может быть описана Лоренцевой зависимостью, которой соответствует некоторое линейное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее вынужденные колебания линейного осциллятора. Такой подход дает особенно точные результаты в случае, когда выбранный резонанс имеет высокую добротность. Таким образом, решение данной задачи в первую очередь требует нахождения функции линейного отклика на внешний гармонический сигнал возмущения.

Трудоемкость решения задачи о вынужденных колебаниях в резонаторе существенным образом зависит от характера уравнений, которыми они описываются. Здесь можно выделить два типа уравнений, которые мы будем называть в одном случае *локальными*, в другом — *нелокальными*. Уравнения, описывающие некоторую систему, будем называть локальными, если параметры состояния системы в каждой точке координатного пространства в любой момент времени зависят от своих значений в предыдущие моменты в той же точке пространства и в бесконечно малой окрестности около нее. Если параметры состояния системы в каждой ее точке зависят от значений этих параметров в предыдущие моменты времени, в этой же точке и в других точках системы, отстоящих от нее на *конечное* расстояние, то про такую систему будем говорить, что она описывается нелокальными уравнениями. В частности, системы обыкновенных дифференциальных уравнений — локальны. Заметим, что многие классические резонаторы: акустические (например, органые трубы), оптические (интерферометр Фабри-Перо), электрические (двухпроводная линия) опи-

сываются локальными уравнениями. Если же в уравнениях, например, присутствуют интегралы по пространству от искомым функций, такие уравнения по нашему определению нелокальны.

В случае локальных уравнений, описывающих систему, функция линейного отклика находится относительно просто, ввиду того, решение задачи о вынужденных малых колебаниях строится на основе базисных функций, имеющих вид экспоненты с комплексным волновым вектором, определяемым из дисперсионного соотношения системы. Ниже в разделах этой главы на примерах двух наиболее часто встречающихся на практике случаев, будет рассмотрено возбуждение распределенных резонаторов, описываемых локальными уравнениями. В первом примере возбуждение осуществляется за счет переменных граничных условий. Нами будет показано, что в таком случае для получения уравнения вынужденных колебаний эффективного элементарного осциллятора необходимо знать только дисперсионное соотношение для бегущих волн, распространяющихся в резонаторе. Во втором примере рассматривается возбуждение колебаний механического осциллятора переменной распределенной внешней силой. При таком возбуждении, в отличие от предыдущего случая, в решение задачи о вынужденных колебаниях, в зависимости от распределения возмущающей нагрузки, могут вносить вклад любые моды собственных колебаний резонатора.

3.1 Пример получения уравнения колебаний эффективного элементарного осциллятора

Рассмотрим некоторую распределенную систему, на которую воздействует внешний гармонический сигнал $f(t)$. В качестве величины f может быть любая физическая величина, определяющая воздействие — сила, электрическое напряжение, поле, или, например, координата заряда, совершающего гармонические колебания, воздействующего на рассматриваемую систему. Выбрав некоторую величину x , являющуюся параметром состояния системы, зависящим от приложенного воздействия, при малых величинах воздействия будем иметь линейную связь между x и f :

$$x(t) = \operatorname{Re} x_{\omega} e^{i\omega t}, \quad f(t) = \operatorname{Re} f_{\omega} e^{i\omega t}, \quad x_{\omega} = K(\omega) f_{\omega}, \quad (54)$$

где f_{ω} и x_{ω} — комплексные амплитуды гармонических сигналов $f(t)$ и $x(t)$, $K(\omega)$ — комплексная передаточная функция. В случае, когда рассматриваемая система является резонатором, полюса $K(\omega)$ имеют первый порядок, находятся в первой и второй четвертях комплексной плоскости, при этом они расположены симметрично относительно мнимой оси, и для каждого полюса справедливо соотношение

$$\frac{\text{Im } z_n}{|\text{Re } z_n|} \ll 1, \quad (55)$$

из которого следует, что резонатор должен иметь большую добротность. Вблизи резонанса с номером n передаточная функция может быть представлена первым членом ее разложения в ряд Лорана:

$$K(\omega) \approx \frac{A \cdot \omega_n}{\omega - \omega_n - i\gamma_n/2}. \quad (56)$$

Заметим, что Лоренцевая функция $-2A\mathcal{L}(\omega, \omega_n, \gamma_n)$ (см. выражение (15)) имеет такой же первый член в разложении в ряд Лорана, как и $K(\omega)$, т.е. справедливо приближенное равенство:

$$\frac{\omega_n}{\omega - \omega_n - i\gamma_n/2} \approx \frac{-2\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_n} \quad (57)$$

Таким образом, в случае любого высокодобротного резонатора его передаточная функция $K(\omega)$ может быть приближенно заменена функцией Лоренцевого вида, и связь между комплексными амплитудами x_ω и f_ω запишется следующим образом:

$$x_\omega = \frac{-2A\omega_n^2 \cdot f_\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_n}. \quad (58)$$

Такой связи между комплексными амплитудами соответствует линейное уравнение второго порядка, описывающее вынужденные колебания осциллятора:

$$\ddot{x} + \gamma_n \dot{x} + \omega_n^2 x = -2\omega_n (\omega_n \text{Re } A \cdot f(t) + \text{Im } A \cdot f'(t)). \quad (59)$$

При данном переходе полагалось, что величина A — комплексная, с действительной и мнимой частью, а также ввиду того, что добротность резонанса предполагается большой, можно производить замену постоянной величины ω_n на переменную ω и наоборот в составляющих выражения $K(\omega)$, которые не влияют на положение его полюса $\omega_n + i\gamma_n/2$.

Далее, на примере детектора малых сил и смещений на основе интерферометра Фабри-Перо будет показано, как можно получить уравнение элементарного осциллятора в случае оптического резонатора. Данное устройство, схема которого изображена на рисунке 11, в частности, используется для детектирования гравитационных волн [68]. Суть его работы такая же как и у ёмкостного датчика и заключается в том, что внешнее воздействие, в данном случае гравитационной волны, отклоняет подвижное зеркало интерферометра, в результате его база меняется и меняются условия для оптического резонанса, что приводит к изменению электрического поля стоячей волны в интерферометре. Это изменение и является признаком наличия смещения подвижного зеркала вследствие некоторого воздействия.

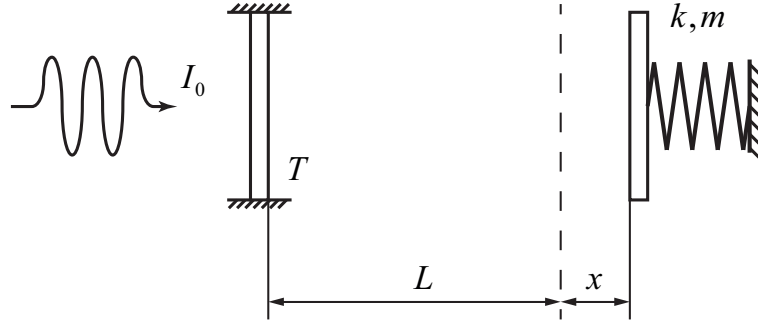


Рис. 11: Детектор смещения на основе интерферометра Фабри-Перо.

Поскольку зеркало справа считается идеальным, амплитуды двух встречных бегущих волн в интерферометре одинаковы. Данную величину E_1 удобно взять в качестве величины, описывающей колебания всего резонатора. При фиксированном расстоянии между зеркалами $l = L + x$, комплексная амплитуда волны, прошедшей через полупрозрачное зеркало с коэффициентом пропускания T (по интенсивности), равная также E_1 , выражается следующим образом:

$$E_1 = \frac{\sqrt{T}E_0}{1 - e^{-2ikl}\sqrt{1-T}}, \quad (60)$$

где E_0 — амплитуда падающей волны, $k = \omega/c$ — волновой вектор света. Далее, для зеркала с большим коэффициентом отражения, для которого $T \ll 1$, можно приближенно записать, что

$$\sqrt{1-T} \approx \exp\left[-\frac{T}{2}\right],$$

после чего выражение для E_1 преобразуется к следующему:

$$E_1 = \frac{\sqrt{T}E_0}{1 - \exp[-2ikl - T/2]}. \quad (61)$$

Видно, что E_1 имеет резонансные максимумы при $k = N\pi/l$, т.е. когда на длине интерферометра укладывается целое число полуволин света. Разложим выражение для E_1 около одного из его полюсов (резонансов) в ряд Лорана:

$$E_1 = \frac{\sqrt{T}E_0}{2i\omega l/c + T/2 - 2\pi iN}, \quad (62)$$

или, в более наглядных обозначениях:

$$E_1 = \frac{\frac{c\sqrt{T}}{2l}E_0}{i\omega - i\omega_N + \gamma/2}, \quad \omega_N = \frac{N\pi c}{l}, \quad \gamma = \frac{Tc}{2l}, \quad (63)$$

где ω_0 — частота резонанса, γ — константа его затухания.

Теперь найдем зависимость Лоренцевого вида, наилучшим образом описывающую вблизи резонанса частотную зависимость (63). Путем несложных преобразований можно легко получить такое приближенное выражение Лоренцевого вида для E_1 :

$$E_1 \approx \frac{c\sqrt{T}}{2l} \times \frac{2i\omega E_0}{\omega_N^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (64)$$

Действительно, если привести данные зависимости к безразмерному виду

$$f_1 = \frac{1}{i(x-1) + 1/2Q}, \quad f_2 = \frac{2ix}{1-x^2 + ix/Q}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_N}, \quad Q = \frac{\omega_N}{\gamma}, \quad (65)$$

можно видеть из графиков, что они мало друг от друга отличаются вблизи резонанса (см. рис. 12).

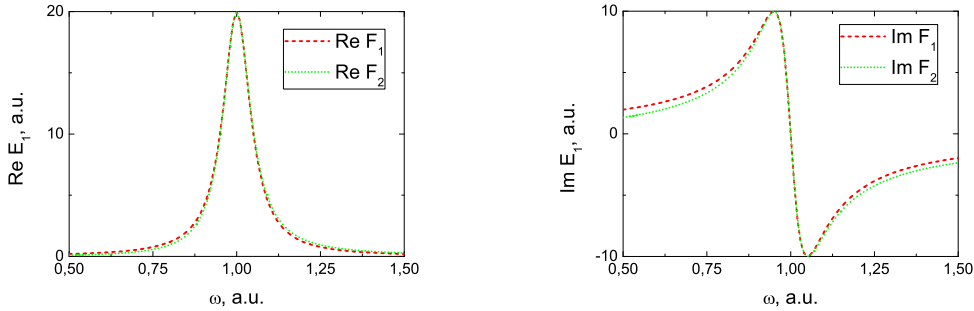


Рис. 12: Действительные (слева) и мнимые (справа) части функций F_1 и F_2 при добротности резонанса $Q = 10$.

При этом отличие тем меньше, чем больше добротность резонанса (параметр Q). Соотношение (61) задающее связь между комплексными амплитудами падающего электрического поля E_0 и поля волны в интерферометре E_1 полностью определяет динамику временной зависимости $E_1(t)$ при заданной зависимости от времени поля, падающего на зеркало извне $E_0(t)$. Действительно, входящий сигнал можно разложить по Фурье-гармоникам, с помощью соотношения (61) найти соответствующие амплитуды гармоник поля внутри интерферометра, а потом выполнить над полученным Фурье-образом $E_{1\omega}$ обратное преобразование Фурье, получив в итоге зависимость $E_1(t)$. С вычислительной точки зрения такая процедура является достаточно громоздкой, но её можно сильно упростить, используя приближенную связь (64) между Фурье-образами $E_1(t)$ и $E_0(t)$. Нетрудно видеть, что соотношение для Фурье-гармоник (64) следует из такого обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\ddot{E}_1 + \gamma\dot{E}_1 + \omega_N^2 E_1 = \frac{c\sqrt{T}}{l} E_0'(t). \quad (66)$$

Таким образом, мы получили уравнение для эффективного элементарного резонатора, обладающего всеми основными свойствами выбранного резонанса ω_N . Заметим, что в данном уравнении все входящие величины вещественные, что удобно для дальнейшего анализа. Теперь запишем уравнение колебаний подвижного зеркала:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = \frac{S}{2\pi} E_1^2, \quad (67)$$

где m , k и α — параметры осциллятора, который собой представляет упруго закрепленное зеркало, а справа стоит сила, обусловленная давлением света на него, при этом S — площадь зеркала, облучаемая светом. Записав совместно последние два уравнения с учетом того, что ω_N зависит от положения зеркала x , и положив входной сигнал внешнего лазерного луча равным $E_0(t) = E_0 \sin \omega t$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = \frac{S}{2\pi} E_1^2 \\ \ddot{E}_1 + \gamma\dot{E}_1 + \omega_{N0}^2 E_1 \left[1 - \frac{2x}{L} \right] = \frac{c\sqrt{T}}{L} \omega E_0 \cos \omega t, \end{cases} \quad (68)$$

где $\omega_{N0} = N\pi c/L$ — собственная частота оптического резонатора при нулевом отклонении зеркала от исходного положения равновесия ($x = 0$).

Можно видеть, что системы уравнений (14) и (68) имеют практически одинаковую структуру, отличие лишь в знаке, стоящем перед квадратичным членом выражения для внешней силы, действующей на механический осциллятор и знаке приращения собственной частоты вследствие смещения механического осциллятора вдоль оси X .

В 4 главе будут рассмотрены более сложные системы, которые также будут сводиться к элементарным осцилляторам. Главным отличием от представленных выше выкладок будет большая сложность вычисления передаточной функции $K(\omega)$, в частности, из-за необходимости учета краевых эффектов.

3.2 Случай волноведущих систем, описывающихся локальными уравнениями

Рассмотрим некоторую одномерную волноведущую систему длины L , описываемую локальными уравнениями. Пусть в системе распространяются волны некоторой величины φ , для которых известен закон дисперсии — зависимость $k(\omega)$ волнового вектора от частоты. Также, на φ наложены граничные условия:

$$\varphi|_{x=0} = f(t) = \text{Re} [f_\omega e^{i\omega t}], \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (69)$$

где φ_0 и ω — амплитуда и частота возбуждающего сигнала. Такие граничные условия,

в частности, накладываются на вынужденные колебания воздуха в акустической трубе, закрытой с одного конца, а также на колебания напряжения в двухпроводной линии, разомкнутой на свободном конце. Решение $\varphi(x, t)$ ищется в виде суммы двух бегущих навстречу волн:

$$\varphi(x, t) = \operatorname{Re} [A \cdot e^{i\omega t - ikx}] + \operatorname{Re} [B \cdot e^{i\omega t + ikx}]. \quad (70)$$

Выполнив необходимые выкладки, получим:

$$\varphi(x, t) = \operatorname{Re} \left[f_\omega \frac{\cos k(L - x)}{\cos kL} \right]. \quad (71)$$

Комплексная величина

$$\varphi_{a,\omega} = \frac{f_\omega}{\cos kL}, \quad (72)$$

входящая в выражение (71), имеет смысл амплитуды колебаний в резонаторе, являющейся в общем случае, негармонического возбуждающего сигнала, величиной переменной. Именно $\varphi_{a,\omega}$ будет фигурировать в выражении для энергии, запасенной в резонаторе или, например, в выражениях, определяющих связь данного резонатора с какими-либо другими системами. Поэтому $\varphi_{a,\omega}$ мы примем за величину, характеризующую колебания эффективного элементарного осциллятора. Соотношение (72), имеющее несложный аналитический вид в частотном пространстве, также соответствует некоторой весьма сложной зависимости во временном пространстве между функциями $\varphi_a(t)$ и $f(t)$, которая может быть представлена в виде системы из бесконечного количества дифференциальных уравнений относительно функции φ_a и ее производных. Разложив косинус в знаменателе данного выражения в ряд Тейлора относительно одного из резонансных значений ω до членов 1-го порядка, мы сможем получить приближенное дифференциальное уравнение, описывающее поведение рассматриваемой системы при частотах, близких к выбранному резонансу. Итак, спектр резонансных частот определяется уравнением:

$$k(z_n) L = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = \overline{0.. \infty} \quad (73)$$

где $z_n = \omega_n + i\gamma_n/2$ — комплексная частота, соответствующая резонансу с номером n . Разложение \cos по ω до членов 1-го порядка выглядит следующим образом:

$$\cos kL \approx \frac{(-1)^{n+1}}{v_{g,n}} \left(\omega - \omega_n - \frac{i\gamma_n}{2} \right) L, \quad v_{g,n}^{-1} = \left. \frac{dk}{dz} \right|_{z=z_n}, \quad (74)$$

где $v_{g,n}$ — групповая скорость волн в резонаторе при частоте ω_n . Таким образом, связь между возмущающим воздействием f_ω и откликом $\varphi_{a,\omega}$ приобретает вид:

$$\varphi_{a,\omega} = \frac{(-1)^{n+1} v_{g,n}}{L} \frac{f_\omega}{\omega - \omega_n - i\gamma_n/2}. \quad (75)$$

Используя приближенное соотношение (57), можем преобразовать полученное выражение к следующему:

$$\varphi_{a,\omega} = \frac{2(-1)^n}{\pi/2 + \pi n} \left(\frac{v_{g,n}}{v_{\phi,n}} \right) \frac{\omega_n^2 f_\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_n}, \quad (76)$$

где $v_{\phi,n}$ — фазовая скорость волн в резонаторе при частоте ω_n . Здесь также использовалось приближенное соотношение

$$k(z_n) v_{\phi,n} \approx \omega_n, \quad (77)$$

которое выполняется тем точнее, чем больше добротность резонанса.

Далее, рассматривая соотношение (76) как связь между переменными величинами $\varphi_a(t)$ и $f(t)$ в частотном пространстве, можем сказать, что во временном пространстве они связаны друг с другом дифференциальным уравнением 2-го порядка с действительными коэффициентами:

$$\ddot{\varphi}_a + \gamma_n \dot{\varphi}_a + \omega_n^2 \varphi_a = \frac{2(-1)^n}{\pi/2 + \pi n} \left(\frac{v_{g,n}}{v_{\phi,n}} \right) \omega_n^2 \times f(t). \quad (78)$$

Процедура получения уравнения колебаний эффективного элементарного осциллятора выполняется аналогично для других граничных условий на концах резонатора. Таким образом, если резонатор описывается локальными уравнениями, и его возбуждение происходит за счет переменных граничных условий, как в рассмотренном выше случае, для получения уравнения колебаний соответствующего ему эффективного элементарного осциллятора необходимо знать только дисперсионное соотношение для волн в этом резонаторе. В следующем параграфе будут представлены волноведущие свойства некоторых электронных систем, используемых в рассматриваемых МЭМ/НЭМ детекторах модулированного терагерцевого излучения.

3.3 Описание механических резонаторов в терминах сосредоточенных параметров

В данном разделе на примере механического резонатора (кантилевера) рассматривается возбуждение внешним распределенным воздействием резонатора, описываемого локальными уравнениями. В данном случае целью является получение уравнения вынужденных колебаний эквивалентного элементарного осциллятора. Для простых оценок его можно выписать в следующем виде:

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s} + \omega_0^2 s = \eta \frac{f_l(t)}{m_l}, \quad (79)$$

где ω_0 — собственная частота колебаний кантилевера, Q — их добротность, m_l — погонная масса кантилевера, f_l — некоторая характерная погонная сила, действующая на кантилевер, η — безразмерный подгоночный параметр. Величина s при этом определяет характерный прогиб кантилевера, это может быть как максимальное его отклонение от недеформированного положения или любая величина, пропорциональная ему, например, среднее смещение точек кантилевера от недеформированного положения. Обычно ω_0 и Q являются известными с большой точностью параметрами для данного резонатора. То же можно сказать о m_l , а также зная профиль нагрузки (распределение переменной погонной силы вдоль кантилевера) можно выбрать характерное ее значение f_l . В то же время параметр η , кроме того, что зависит от выбора величины s , также зависит от профиля нагрузки и типа закрепления концов кантилевера. Дальнейшее изложение призвано упорядочить процесс получения эквивалентного уравнения, в частности, в нем даны рекомендации относительно выбора характерной величины прогиба кантилевера s и дано выражение для вычисления параметра η . Подход, излагаемый данным параграфом в некотором виде использовался при получении результатов, представленных в работах [76, 77] и в более общем виде он описывается в работе [78]. В этом параграфе мы в определенной степени воспроизведем теорию, изложенную в работе [78], сделав акцент на получение уравнений эквивалентных элементарных осцилляторов, соответствующих всему набору резонансов кантилевера, консольно закрепленного с обоих концов.

Существует несколько неэквивалентных вариантов закрепления двух концов кантилевера, они перечислены в таблице 4. В этом разделе будет показан процесс получения эквивалентного уравнения для одного первого случая, когда кантилевер консольно закреплен с обоих концов. Для остальных случаев эквивалентное уравнение получается аналогичным образом.

№	левый конец	правый конец
1	консольное	консольное
2	консольное	нет закрепления
3	консольное	шарнирное
4	шарнирное	шарнирное

Таблица 4: Типы закрепления двух концов кантилевера.

Колебания механического кантилевера описывается уравнением упругой линии:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma_m \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{J_b}{m_l} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \frac{f_l(z, t)}{m_l}, \quad (80)$$

где $y(z, t)$ — отклонение оси кантилевера от недеформированного положения (оси Z в рассматриваемом случае), γ_m — показатель затухания колебаний, J_b — жесткость кантилевера на изгиб, определяемая его материалом и формой поперечного сечения, m_l — погонная масса, и f_l — распределенная механическая сила, действующая на кантилевер вдоль поперечной оси Y . При консольном закреплении с обоих концов на функцию $y(z, t)$ накладываются следующие граничные условия:

$$y|_{z=\pm \frac{l}{2}} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_{z=\pm \frac{l}{2}} = 0. \quad (81)$$

В случае шарнирного закрепления в точке z_0 условие было бы такое:

$$y|_{z=z_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=z_0} = 0. \quad (82)$$

Равенство нулю второй производной y по координате выражает тот факт, что к сечению кантилевера в данной точке приложен нулевой момент силы. А если точка кантилевера с координатой z_0 является свободной, граничное условие в ней будет следующим:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \Big|_{z=z_0} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} \Big|_{z=z_0} = 0. \quad (83)$$

Третьей производной смещения по координате в изогнутом кантилевере пропорциональна поперечная сила, действующая на сечение, которая равна нулю на свободном конце.

Найдем собственные решения однородного уравнения, когда $f_l = 0$. В бесконечном стержне для данной частоты ω возможно распространение изгибных волн с четырьмя различными волновыми векторами κ :

$$\kappa^{1,2} = \pm \kappa, \quad \kappa^{3,4} = \pm i\kappa, \quad \kappa = \frac{\sqrt[4]{\omega(\omega - i\gamma_m)}}{\mathfrak{a}}, \quad \mathfrak{a}^4 = \frac{J_b}{m_l}, \quad (84)$$

где корень четвертой степени понимается в смысле его главного значения.

Из собственных волн с найденными четырьмя волновыми векторами можно составить линейную комбинацию, которая будет удовлетворять граничным условиям (81). Симметричные относительно $z = 0$ собственные решения будут иметь вид:

$$y = y_0(z) \frac{e^{i\omega t}}{2} + y_0^*(z) \frac{e^{-i\omega t}}{2}, \quad y_0 = \cos \kappa z + \chi_S \cosh \kappa z. \quad (85)$$

Аналогично для антисимметричных решений можно записать:

$$y_0 = \sin \kappa z + \chi_{AS} \sinh \kappa z. \quad (86)$$

Потребовав выполнения граничных условий для функции $y(z, t)$, получим для симметричных и антисимметричных решений выражения:

$$\chi_S = -\frac{\cos \kappa L/2}{\cosh \kappa L/2}, \quad \chi_{AS} = -\frac{\sin \kappa L/2}{\sinh \kappa L/2}. \quad (87)$$

Затем, используя граничные условия для производной функции, получим для симметричных волн следующее дисперсионное уравнение:

$$\tan \kappa L/2 = -\tanh \kappa L/2, \quad (88)$$

а для антисимметричных волн —

$$\tan \kappa L/2 = \tanh \kappa L/2. \quad (89)$$

Существует общее уравнение, объединяющее решения двух последних:

$$\cos \kappa L = \frac{1}{\cosh \kappa L}. \quad (90)$$

Нечетные корни данного уравнения $\xi_{2j-1} = \kappa_{2j-1}L$, $j \in \overline{1 \dots \infty}$ соответствуют симметричным модам, а четные $\xi_{2j} = \kappa_{2j}L$, $j \in \overline{1 \dots \infty}$ — антисимметричным. Введем нормированные на единицу симметричные и антисимметричные собственные решения:

$$\begin{aligned} \psi_{S,j}(z) &= y_{S,j}(z)/N_{S,j}, & N_{S,j}^2 &= \int_{-0.5}^{0.5} y_{S,j}^2(z) d\left[\frac{z}{L}\right], \\ \psi_{AS,j}(z) &= y_{AS,j}(z)/N_{AS,j}, & N_{AS,j}^2 &= \int_{-0.5}^{0.5} y_{AS,j}^2(z) d\left[\frac{z}{L}\right]. \end{aligned} \quad (91)$$

Поскольку функции $\psi_{S,j}(z)$ и $\psi_{AS,j}(z)$ являются собственными решениями линейного дифференциального оператора, они образуют полный ортогональный базис и по ним можно разложить любую кусочно-непрерывную функцию на отрезке $z \in [-L/2..L/2]$.

Так, если имеется определенная на отрезке $z \in [-L/2..L/2]$ кусочно-непрерывная функция $g(z)$, ее разложение будет выглядеть следующим образом:

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} [a_j \psi_{S,j}(z) + b_j \psi_{AS,j}(z)],$$

$$a_j = \int_{-0.5}^{0.5} g(z) \psi_{S,j}(z) d\left[\frac{z}{L}\right], \quad b_j = \int_{-0.5}^{0.5} g(z) \psi_{AS,j}(z) d\left[\frac{z}{L}\right].$$
(92)

Теперь вернемся к нахождению вынужденных колебаний в одном распространенном случае, когда функция распределения погонной силы $f_l(z, t)$ имеет вид стоячей волны. Таким образом, требуется решить уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \gamma_m \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{J_b}{m_l} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \frac{f_l(z, t)}{m_l}$$
(93)

при граничных условиях (81). Для этого разложим искомое решение $y(z, t)$ и функцию распределенной силы $f_{l,\omega}(z)$ в правой части по базисным функциям $\psi_j(z)$:

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j(t) \psi_j(z),$$

$$f_l(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{l,j}(t) \psi_j(z), \quad f_{l,j}(t) = \int_{-0.5}^{0.5} f_l(z, t) \psi_j(z) d\left[\frac{z}{L}\right],$$
(94)

где в качестве ψ_j при нечетном j берется $\psi_{S,[j/2]+1}$, и $\psi_{AS,[j/2]}$ при четном.

Подставив в дифференциальное уравнение (93) данные ряды, получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left(\ddot{y}_j + \gamma_m \dot{y}_j - \frac{f_{l,j}(t)}{m_l} \right) \psi_j(z) + \frac{J_b}{M_l} \times y_j \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial z^4} \right\} = 0.$$
(95)

Теперь добавим в каждый член данной суммы равное нулю выражение:

$$-\omega_j (\omega_j - i\gamma_m) y_j \psi_j(z) + \omega_j (\omega_j - i\gamma_m) y_j \psi_j(z),$$

где ω_j — частота собственных колебаний j -ой моды, определяемой из дисперсионного соотношения:

$$-\omega_j (\omega_j - i\gamma_m) + \varkappa^4 \kappa_j^4 = 0, \quad \kappa_j = \frac{\xi_j}{L},$$
(96)

где ξ_j — корень уравнения

$$\cos \xi = \frac{1}{\cosh \xi},$$
(97)

с номером j , нумерация корней начинается с нуля, при этом $\xi_0 = 0$.

Учитывая, что для собственных функций $\psi_j(z)$ справедливо соотношение

$$-\omega_j(\omega_j - i\gamma_m)\psi_j(z) + \frac{J_b}{m_l} \frac{\partial^4 \psi_j}{\partial z^4} = 0, \quad (98)$$

выражение (95) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\ddot{y}_j + \gamma_m \dot{y}_j + \frac{J_b}{m_l} \frac{\xi_j^4}{L^4} y_j - \frac{f_{l,j}(t)}{m_l} \right) \psi_j(z) = 0. \quad (99)$$

Величину в скобках перед y_j можно рассматривать как собственную частоту j -го резонанса:

$$\Omega_j = \sqrt{\frac{J_b}{m_l} \frac{\xi_j^2}{L^2}}. \quad (100)$$

В силу ортогональности базисных функций $\psi_j(z)$, из соотношения (99) следуют динамические уравнения для амплитуд колебаний каждой отдельной моды:

$$\ddot{y}_j + \gamma_m \dot{y}_j + \Omega_j^2 y_j = \frac{f_{l,j}(t)}{m_l}. \quad (101)$$

Запишем элементарную работу, совершаемую над нанотрубкой распределенной силой, действующей на нее:

$$\delta A = \int_{-L/2}^{L/2} f_l(z, t) y(z, t) dz = L \sum_{j=1}^{\infty} f_{l,j}(t) y_j(t), \quad (102)$$

Отсюда мы видим, что величины $y_j(t)$ и $L \cdot f_{l,j}(t)$ представляют собой соответственно обобщенные координаты и обобщенные силы в том смысле, в котором они понимаются в теоретической механике.

Обычно интерес представляют колебания только основной моды механических колебаний кантилевера Ω_1 . При этом с достаточной степенью точности справедливо следующее приближение:

$$\xi_1 \approx \frac{3\pi}{2}, \quad (103)$$

используя которое можно в явном виде выразить основную частоту механических колебаний:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{J_b}{m_l} \frac{9\pi^2}{4L^2}}. \quad (104)$$

В результате мы получили уравнения (101), описывающие колебания всех изгибных колебательных мод кантилевера. Из этих уравнений можно получить уравнение

в исходной форме (79), если предположить, что распределенная сила $f_l(z, t)$ представляется в следующей форме:

$$f_l(z, t) = f_l(t) \cdot g(z), \quad (105)$$

где безразмерная функция $g(z)$ задает профиль нагрузки, а $f_l(t)$ — амплитудное ее значение в данный момент времени. Подставив это выражение в (101) и используя формулы (94), получим уравнение для колебаний основной моды в исходной форме (79):

$$\ddot{y}_1 + \gamma_m \dot{y}_1 + \Omega_1^2 y_1 = \eta \frac{f_l(t)}{m_l}, \quad \eta = \int_{-0.5}^{0.5} g(z) \psi_1(z) d\left[\frac{z}{L}\right]. \quad (106)$$

Таким образом, в этом разделе мы показали, что в качестве смещения эквивалентного осциллятора удобно взять величину y_1 , представляющую собой скалярный размерный коэффициент перед безразмерной функцией прогиба первой гармоники $\psi_1(z/L)$. При этом максимальный прогиб кантилевера имеет место в точке $z = 0$ и его максимальное значение равно $y_1 \cdot \psi_1(0)$. Также, было найдено точное выражение для параметра η , фигурирующего в уравнении (79), и установлено, что уравнение в такой форме получается только в частном, но достаточно распространенном случае, когда распределенная сила, действующая на кантилевер представляется в виде (105).

3.4 Выводы

В данной главе было отмечено, что любой распределенной системе, имеющей линейный резонансный отклик, в пределах ширины резонанса соответствует некоторый элементарный осциллятор имеющий такую же комплексную амплитудно-частотную характеристику. В случае, если резонатор описывается локальными уравнениями, процесс получения уравнения колебаний эквивалентного элементарного осциллятора характеризуется следующими общими свойствами:

- В случае возбуждения резонатора путем локального воздействия, выражающегося в переменных граничных условиях, накладываемых на колеблющиеся величины, для получения параметров эквивалентного элементарного осциллятора, соответствующего выбранному резонансу, достаточно знать лишь дисперсионное соотношение для бегущих волн в резонаторе.
- Возбуждение резонатора внешним переменным распределенным воздействием может быть представлено как возбуждение бесконечного счетного количества эквивалентных элементарных осцилляторов, соответствующим всем модам сво-

бодных колебаний резонатора. При этом смещения осцилляторов и соответствующие действующие на них силы представляют собой обобщенные координаты и силы исходной распределенной системы в том смысле, как это понимается в теоретической механике.

4 Примеры резонаторов, описываемых нелокальными уравнениями и их сведение к элементарным осцилляторам

Одним из основных элементов МЭМ/НЭМ детекторов является плазменный резонатор на основе низкоразмерных электронных систем, таких как двумерный электронный газ (2d-ЭГ) в полупроводниковых гетероструктурах и графене, а также квазиодномерный электронный газ в одностенных углеродных нанотрубках (ОСУНТ) с металлической проводимостью. Низкоразмерные электронные системы выбраны в данном случае потому, что электроны в них имеют высокую подвижность, а плазменные волны (или волны электронной плотности) достаточно замедлены, в результате чего на их основе возможно создание резонаторов терагерцевой частоты микрометрового размера с приемлемой добротностью. Поскольку взаимодействие между электронами является дальнодействующим, в уравнениях движения заряда появляются интегралы от неизвестных функций по всей геометрии системы, а сами уравнения, описывающие колебания заряда в плазменных резонаторах оказываются нелокальными. В отличие от локальных уравнений, в нелокальном случае для резонатора конечных размеров становится невозможным выписать уравнение бегущей волны в стандартном виде комплексной экспоненты с постоянной амплитудой и постоянным волновым вектором. Это обстоятельство кардинальным образом затрудняет нахождение решений для колеблющихся величин в аналитическом виде. При этом численные методы решения таких задач, предоставляемые известными программными пакетами оказываются неэффективными ввиду того, что в случае низкоразмерных систем искомые точные пространственные зависимости заряда в них часто имеют сингулярности на границе низкоразмерного резонатора.

В первом разделе данной главы будут рассчитаны спектры волн в основных плазменных волноведущих материалах, на основе которых могут быть выполнены терагерцевые резонаторы для МЭМ/НЭМ детекторов. Заметим, что из вида дисперсионного соотношения для волн, распространяющихся в волноводе можно установить локальность или нелокальность уравнений, которые описывают колеблющиеся в нем величины. Так, волноведущая система описывается или ее описание может быть сведено к локальным уравнениям, если можно подобрать такую однородную линейную

алгебраическую систему уравнений, дискриминант которой дает дисперсионное соотношение этого волновода, и при этом элементы матрицы данного однородного уравнения являются действительными полиномиальными функциями от величин $i\omega$ и ik_α , где $\alpha \in \{x, y, z\}$ — наименования координатных осей, а k_α — проекции волнового вектора на них.

Во втором и третьем разделах будет рассмотрено возбуждение колебаний в двух плазменных резонаторах, описываемых нелокальными уравнениями. Первый резонатор выполнен на основе полевого транзистора с высокой подвижностью электронов с цилиндрическим затворным электродом. Второй — представляет собой ограниченный отрезок микрометрового размера ОСУНТ с металлической проводимостью, находящийся в поле электромагнитной волны терагерцевого диапазона. Для точного решения нелокальных уравнений, описывающих колебания в рассматриваемых плазменных резонаторах применялся метод Галёркина с использованием тригонометрических базисных функций. Он также успешно использовался в работе автора диссертации, для нахождения характеристик графенового пролетного $p-i-n$ диода [79]. В случаях обоих резонаторов были найдены их точные комплексные амплитудно-частотные характеристики и сравнены с таковыми, полученными при использовании приближенных моделей описания данных систем. Оказалось, что в резонаторе на основе двумерного электронного газа в транзисторе с цилиндрическим затворным электродом приближенная модель, которая в частности была использована в других публикациях [38], дает значения параметров эффективного элементарного осциллятора, отличные от точных на множитель порядка единицы. Это могло бы быть аргументом в пользу использования приближенной модели, которая позволяет получать решения в аналитическом виде и не требует выполнения времязатратных операций на компьютере, в отличие от точного расчета, однако, она неверно описывает некоторые характеристики резонатора, относящиеся, в частности, к колебаниям его высших мод.

В случае возбуждения плазменных волн в отрезке ОСУНТ, было найдено точное решение для распределения тока вдоль нее путем численного решения уравнения Поклингтона с точным ядром. Также, данная задача была решена приближенным способом, в основе которого лежит замена исходных нелокальных уравнений, описывающих систему, некоторой системой локальных уравнений. Оказалось, что точный и приближенный методы дают очень близкие результаты, что можно объяснить тем, что входящий в дисперсионное соотношение член в виде логарифма волнового вектора, и указывающий на то, что уравнения, описывающие систему не могут быть приведены к конечной системе локальных уравнений, является достаточно слабой зависимостью, которую можно при определенных условиях считать постоянной. Это обстоятельство позволит нам в дальнейшем существенно упростить выкладки при

моделировании детектора на основе плазменного резонатора из двух металлических ОСУНТ, в котором волны характеризуются дисперсией похожего вида.

4.1 Дисперсионные свойства плазменных волн в некоторых двумерных и (квази-)одномерных электронных системах

В этом разделе мы рассмотрим плазменные волны в двух типах электронных систем — в двумерном электронном газе (2d-ЭГ, 2DEG), возникающем в полупроводниковых гетероструктурах типа GaAs/AlGaAs, а также в квазиодномерном электронном газе в ОСУНТ с металлической проводимостью. Как отмечалось выше, в силу дальнего действия Кулоновских сил, распространение волн плотности электрического заряда, в общем случае описывается нелокальными уравнениями. Однако, при некоторых условиях такие волны могут с достаточной степенью точности подчиняться локальным уравнениям. Простейшим примером здесь может служить двухпроводная линия, традиционно описываемая локальной системой дифференциальных уравнений, имеющих соответствующее название. Заметим, что такой подход справедлив только в случае длины распространяющейся волны, много большей расстояния между проводами линии. Такая система уравнений работает также и применительно к другим плазменным волноведущим системам, когда имеется два связанных близко расположенных параллельных волновода или когда один волновод экранирован близко расположенной хорошо проводящей металлической плоскостью.

Плазменные волны в 2d-ЭГ

Волны электронной плотности, распространяющиеся в двумерном электронном газе, возникающем в полупроводниковых гетероструктурах рассматривались еще в работах сорокалетней давности [80, 81]. Для моделирования устройств, рассматриваемых в данной диссертации в отдельных случаях требуется знание спектра плазменных волн в 2d-ЭГ в случае более сложной геометрии — например, когда 2d-ЭГ окружен двумя слоями диэлектриков с обеих сторон. Действительно, 2d-ЭГ возникает на границе между двумя полупроводниками определенной толщины (например между GaAs и AlGaAs), которые сами тоже граничат с какими-либо материалами — субстратом, вакуумом или металлом. Поэтому в этом параграфе рассматриваются плазменные волны в следующей геометрии: двумерный электронный газ (для определенности расположенный горизонтально) сверху граничит с материалом 1 с диэлектрической проницаемостью ε_1 и толщиной h_1 , снизу с материалом 2 с диэлектрической проницаемостью ε_2 и толщиной h_2 , при этом материал 1 граничит с полубесконечным материалом 3 с диэлектрической константой ε_3 , а материал 2 — с полубесконечным материалом 4 с диэлектрической константой ε_4 . Динамика электронной плотности

описывается линейризованными гидродинамическими уравнениями (11), о которых говорилось в параграфе 1.3:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - en_S \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma v = -\frac{e}{m^*} E_x \end{cases} \quad (107)$$

где n_S — плотность свободных электронов в 2d-ЭГ, γ — частота электронных столкновений в нем, m^* — эффективная масса электрона. Решив совместно эту систему с уравнениями Максвелла и граничными условиями на всех границах между материалами (подробный вывод приведен в приложении А.2), получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega(\omega - i\gamma) \left[\frac{\frac{\varepsilon_3}{\kappa_3} + \frac{\varepsilon_1 \operatorname{th} \kappa_1 h_1}{\kappa_1}}{\frac{\varepsilon_3 \kappa_1}{\varepsilon_1 \kappa_3} \operatorname{th} \kappa_1 h_1 + 1} + \frac{\frac{\varepsilon_4}{\kappa_4} + \frac{\varepsilon_2 \operatorname{th} \kappa_2 h_2}{\kappa_2}}{\frac{\varepsilon_4 \kappa_2}{\varepsilon_2 \kappa_4} \operatorname{th} \kappa_2 h_2 + 1} \right] = \frac{4\pi e^2 n_S}{m^*}, \quad (108)$$

при этом величина κ_l , представляет собой абсолютное значение мнимой компоненты волнового вектора электромагнитной волны в материале с номером l , нормальной к плоскостям границ между материалами, и вычисляется как

$$\kappa_l = \sqrt{q^2 - \varepsilon_l \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \operatorname{Re} \kappa_l \geq 0. \quad (109)$$

Рассмотрим частные случаи уравнения (108). Далее всегда будем считать, что длина волны плазмона много меньше длины волны в рассматриваемых материалах: $q \gg \varepsilon_l \omega / c$, это справедливо для терагерцевого диапазона частот и параметров 2d-ЭГ во всех широко используемых гетероструктурах. Тогда, в соответствии с выражениями (109), справедливо приближенное соотношение: $\kappa_l \approx q$. Итак, сначала положим $\kappa_1 h_1, \kappa_2 h_2 \ll 1$, в результате дисперсионное соотношение приобретает такой же вид, как и в случае уединенного двумерного электронного газа в вакууме, за исключением поправочного множителя \varkappa , который можно трактовать как поправку к эффективной массе электрона:

$$\omega(\omega - i\gamma) = \frac{2\pi e^2 n_S}{\varkappa m^*} q, \quad \varkappa = \frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_4}{2}, \quad \kappa_1 h_1, \kappa_2 h_2 \ll 1. \quad (110)$$

Если положить $\kappa_1 h_1, \kappa_2 h_2 \gg 1$, получим то же дисперсионное соотношение, но с другим значением поправочного множителя \varkappa :

$$\omega(\omega - i\gamma) = \frac{2\pi e^2 n_S}{\varkappa m^*} q, \quad \varkappa = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, \quad \kappa_1 h_1, \kappa_2 h_2 \gg 1. \quad (111)$$

Далее, рассмотрим еще один важный частный случай соотношения (108), когда $\varepsilon_3 \rightarrow -\infty$, что соответствует наличию идеально проводящего металлического

электрода вблизи двумерного электронного газа. При этом также будем считать, что $\kappa_1 h_1, \kappa_2 h_2 \ll 1$. Разделив первое слагаемое в квадратных скобках на большую величину ε_3/κ_3 , получим:

$$\omega(\omega - i\gamma) \left[\frac{\varepsilon_1}{q^2 h_1} + \frac{\varepsilon_4}{q} \right] = \frac{4\pi e^2 n_S}{m^*}, \quad (112)$$

что при выполнении соотношения $qh_1 \ll \varepsilon_1/\varepsilon_4$ дает знакомое дисперсионное соотношение, которое можно легко получить для экранированного двумерного электронного газа при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 = 1$ [34, 37, 70]:

$$\omega(\omega - i\gamma) = v_p^2 q^2, \quad v_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_S h_1}{\varepsilon m^*}, \quad \varepsilon = \varepsilon_1. \quad (113)$$

Заметим, что дисперсионное уравнение вида (113) для экранированного 2d-ЭГ можно формально получить, положив в уравнениях (107)

$$E_x = -\frac{m^* v_p^2}{e^2 n_S} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (114)$$

в результате чего система уравнений, описывающая рассматриваемые волны станет локальной. Покажем теперь непосредственно как осуществляется такой переход. Как уже отмечалось, в случае двумерного электронного газа происходит сильное замедление волн электронной плотности по сравнению со светом. В результате имеем соотношение $q \gg \varepsilon_l \omega/c$, выражающее тот факт, что длина волны плазмона в 2d-ЭГ много меньше длины волны света при той же частоте. Отсюда следует, что при вычислении электрического поля, действующего на электроны в двумерном газе можно учитывать только Кулоновскую составляющую. Для удобства расчета рассмотрим уединенный электронный газ, находящийся в вакууме, экранированный идеально проводящей плоскостью, находящейся на расстоянии h от 2d-ЭГ. Тогда при расчете волн, распространяющихся в газе вдоль направления X будем иметь следующее выражение для электрического поля в газе [70]:

$$E_x = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\sigma(\xi, t)}{x - \xi} d\xi - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\sigma(\xi, t)(x - \xi)}{(2h)^2 + (x - \xi)^2} d\xi, \quad (115)$$

второе слагаемое в котором обусловлено зеркальным отображением зарядов в 2d-ЭГ в металлической плоскости. Для оценочного анализа с целью преобразования данного выражения можно использовать следующее соотношение:

$$\frac{1}{x + i0 - \xi} = -\pi i \cdot \delta(x - \xi), \quad (116)$$

которое было бы полностью справедливо, если бы пределы интегрирования в выражении для E_x были бы бесконечными, а функция $\sigma(\xi, t)$ имела бы полюса только при $\xi = \infty$. Также, используя теорему Коши о вычетах, можем преобразовать второй

член, в результате получим новое выражение для E_x :

$$E_x = -2\pi i \cdot \sigma(x, t) + 2\pi i \cdot \sigma(x + 2ih, t), \quad (117)$$

которое тем точнее выполняется, чем больше пределы интегрирования L (по сравнению с длиной волны в 2d-ЭГ). Далее, считая h малым по сравнению с L и длиной плазменной волны (характерной длиной, на которой меняется σ), E_x можно преобразовать следующим образом:

$$E_x = -4\pi h \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (118)$$

что в точности соответствует выражению (114) при диэлектрической проницаемости материала между 2d-ЭГ и металлом ε_1 , равной единице. Для того чтобы понять, насколько правомерно использование последней формулы (а также формулы (114)) в случае ограниченной полоски 2d-ЭГ, перепишем (115) в таком виде:

$$E_x = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\sigma(\xi, t)(2h)^2}{(x - \xi)[(2h)^2 + (x - \xi)^2]} d\xi. \quad (119)$$

Функция, с которой свертывается $2\sigma(\xi, t)$, имеет заметное отличие от нуля только в окрестности $x \pm 2h$, поэтому у нас есть все основания считать, что при $h \ll L$ и $h \ll \lambda_p$ (длины волны плазмона), с достаточной степенью точности справедливо соотношение

$$\frac{2h}{(x - \xi)[(2h)^2 + (x - \xi)^2]} = -\pi \delta'(x - \xi), \quad (120)$$

а электрическое поле в экранированном двумерном электронном газе определяется локальными выражениями (114) и (118).

Таким образом, основным признаком того, что система может быть описана локальными уравнениями для нас является линейный вид дисперсионного соотношения (113). В таком случае для вычисления резонансов в ней, а также ее сведения к эффективному элементарному осциллятору можно пользоваться формализмом, изложенным в параграфе 3.2. Для нелокальной системы нахождение связи между возмущающим воздействием на нее и результирующим откликом может представлять более громоздкую задачу, что будет представлено в последующих параграфах.

Плазменные волны в металлических ОСУНТ

Другим перспективным материалом для создания плазменных резонаторов и волноведущих систем нанометрового размера являются одностенные углеродные нанотрубки (ОСУНТ) с металлической проводимостью. Одностенная углеродная нанотрубка представляет собой лист графена, свернутый в цилиндр таким образом, чтобы сохранялась периодичность системы при передвижении вдоль кристаллогра-

фических направлений \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 (см. рисунок 13). Свойства нанотрубки полностью определяются вектором \mathbf{R} , поперек которого она сворачивается, а сам вектор, соответственно, определяется целочисленными координатами (m, n) в базисе векторов \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 . Нанотрубки можно разделить на три класса: “armchair”, у которых $m = n$, “zigzag”, у которых $n = 0$, и “chiral” в остальных случаях. В зависимости от вектора (m, n) спектр электронных состояний в нанотрубках может иметь запрещенную зону, или не иметь её. В последнем случае спектр имеет линейный вид

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) = \pm v_F |\mathbf{p} - \mathbf{p}_F|, \quad v_F = \frac{3\gamma_0 b}{2\hbar}, \quad (121)$$

где v_F — скорость Ферми в нанотрубке, b — расстояние между соседними атомами углерода в кристаллической ячейке, γ_0 — энергия связи между атомами, примерно равная 2.7 эВ, \mathbf{p}_F — импульс Ферми в нанотрубке. Нанотрубки, обладающие таким бесщелевым спектром называются металлическими. Признаком бесщелевого спектра в случае нанотрубок типа “zigzag” является соотношение $m = 3q$, для “chiral” — $2m + n = 3q$, где q — целое число. Нанотрубки типа “armchair” всегда имеют бесщелевой спектр.

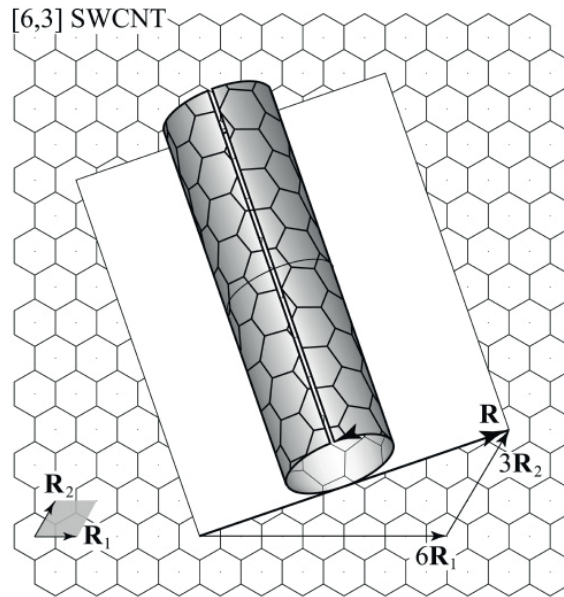


Рис. 13: Схематичная иллюстрация как из листа графена сворачивается нанотрубка с кристаллографическими параметрами $(6, 3)$ [82].

В случае металлических одностенных углеродных нанотрубок, на основании кинетического уравнения и при пренебрежении межзонными электронными переходами может быть получено следующее выражение для поверхностной проводимости [66, 83]:

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \frac{2e^2 v_F}{\pi^2 \hbar a} \times \frac{1}{i\omega + \gamma}, \quad (122)$$

где a — радиус нанотрубки, γ — частота электронных столкновений. Зная поверхностную проводимость нанотрубки, можно получить уравнение, описывающее динамику тока в ней (аналог закона Ома). Действительно, рассматривая связь между током и напряженностью электрического поля посредством коэффициента проводимости (122) как уравнение в частотном пространстве, можно перейти к уравнению во временном пространстве, выполнив обратное преобразование Фурье:

$$\dot{J} + \gamma J = \frac{4e^2 v_F}{\pi \hbar} E_z(t, z), \quad (123)$$

где J — полный ток, проходящий через поперечное сечение нанотрубки, причем мы здесь предполагаем, что распределение линейных токов (на единицу длины окружности сечения) аксиально симметрично. Данное уравнение не учитывает “квантовую” ёмкость нанотрубки [84], которая в частности обусловлена наличием конечной сжимаемости у Ферми-газа даже если он состоит из нейтральных частиц. Уравнение, включающее поправку на квантовую ёмкость, записанное в системе совместно с законом сохранения заряда выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial z} = 0 \\ J + \gamma J + v_F^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{4e^2 v_F}{\pi \hbar} E_z, \end{cases} \quad (124)$$

где ρ — линейная плотность заряда на нанотрубке. Для нахождения спектра плазменных необходимо решить эту систему уравнений совместно с уравнениями Максвелла и граничными условиями на цилиндрической поверхности нанотрубки. В результате выкладок (см. приложение А.3), в случае одной уединенной нанотрубки получаем следующее дисперсионное соотношение для волн электронной плотности:

$$\omega(\omega - i\gamma) = k^2 v_F^2 + \omega_p^2(qa) \left[\frac{I_1(qa)}{I_0(qa)} + \frac{K_1(qa)}{K_0(qa)} \right]^{-1}, \quad (125)$$

где q — абсолютное значение нормальной к нанотрубке мнимой составляющей волнового вектора и ω_p^2 характерная плазменная частота нанотрубки, которые вычисляются следующим образом:

$$q = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \omega_p^2 = \frac{8e^2 u_F}{\pi a^2 \hbar}, \quad (126)$$

где k — волновой вектор плазмона, направленный вдоль оси Z .

Поскольку плазменные волны терагерцевого диапазона в одностенных нанотрубках оказываются сильно замедлены (их фазовая скорость в сотни раз меньше скорости света в вакууме при той же частоте), $k \gg \omega/c$, следовательно в последнем

выражении можно положить $q \approx k$, что сильно упрощает решение дисперсионного уравнения (125). Также, приняв во внимание, тот факт, что длина волны плазмона много больше радиуса нанотрубки, т.е. что $ka \ll 1$, а также приближения модифицированные функции Бесселя при малых аргументах

$$I_0(x) \approx 1, I_1(x) \approx \frac{x}{2}, K_0(x) \approx -\ln x, K_1(x) \approx \frac{1}{x}, \quad x \ll 1, \quad (127)$$

получаем дисперсионное уравнение в еще более простом виде:

$$\omega(\omega - i\gamma) = k^2 [v_F^2 + v_{ED}^2 K_0(ka)], \quad v_{ED}^2 = \frac{8e^2 v_F}{\pi \hbar}. \quad (128)$$

Такое же дисперсионное уравнение можно получить, если в системе (124) положить электрическое поле E_z зависящим по Кулоновскому закону только от зарядов в самой нанотрубке. Тогда оно на поверхности нанотрубки будет вычисляться следующим образом:

$$E_z(z, t) = -\frac{\partial}{\partial z} \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot \sigma(\zeta, t) d\phi}{\sqrt{(\zeta - z)^2 + 4a^2 \sin^2(\phi/2)}}, \quad (129)$$

где σ — поверхностная плотность заряда в нанотрубке.

В случае бесконечной синусоидальной волны

$$\sigma(z, t) = \text{Re} [\sigma_\omega \exp(i\omega t - ikz)] \quad (130)$$

интеграл по z вычисляется с бесконечными пределами и используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t \pm ik\zeta} d\zeta}{\sqrt{(\zeta - z)^2 + a^2}} = 2K_0(ka) e^{i\omega t \pm ikz}, \quad (131)$$

можно преобразовать E_z к следующему виду:

$$E_z(z, t) = -\frac{\partial}{\partial z} \left[2\rho(z, t) \int_0^{2\pi} K_0(2ka \cdot \sin(\phi/2)) \frac{d\phi}{2\pi} \right], \quad (132)$$

где $\rho = 2\pi a \cdot \sigma$ — линейная плотность заряда в нанотрубке. Интеграл в этом выражении при малом значении $ka \ll 1$ с большой степенью точности равен $K_0(ka)$. С учетом этого, подставив выражение (132) в уравнения, описывающие электронный транспорт в нанотрубке (124) получим дисперсионное уравнение (125), которое ранее получили изначально исходя из полной системы уравнений Максвелла. Второй способ получения дисперсионного уравнения с использованием Кулоновского приближения показывает, что уравнения, описывающие плазмоны в одной изолированной

нанотрубке нелокальны и, например, при расчете плазменного резонанса в отрезке конечной длины из нее, краевые эффекты могут иметь существенное значение.

Случай двух параллельно расположенных нанотрубок

Рассмотрим две одинаковые одностенные углеродные нанотрубки, расположенные параллельно на расстоянии d друг от друга. Нанотрубки будем считать тонкими, т.е. их радиус $a \ll d$, при этом расстояние d будем считать много меньшим по сравнению с длиной волны электромагнитного излучения рассматриваемого терагерцевого диапазона. При таких условиях можно воспользоваться Кулоновским приближением при вычислении электрического поля и записать две системы уравнений, описывающие колебания электронной плотности в каждой нанотрубке:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial J_{1,2}}{\partial z} = 0 \\ J_{1,2} + \gamma J_{1,2} + v_F^2 \frac{\partial \rho_{1,2}}{\partial z} = \frac{4e^2 v_F}{\pi \hbar} (E_z^{(11,22)} + E_z^{(12,21)}), \end{cases} \quad (133)$$

где ρ_m и J_m локальная плотность заряда и локальный ток в нанотрубке с номером m , $E_z^{(mm)}$ — локальная напряженность поля вблизи поверхности m -ой нанотрубки, обусловленная ее собственными зарядами, $E_z^{(mn)}$ — локальная напряженность электрического поля вблизи поверхности m -ой нанотрубки, обусловленная зарядами n -ой нанотрубки. Подставив в данную систему волновые решения

$$\rho_m(z, t) = \text{Re}(\rho_{m,\omega} e^{i\omega t - ikz}), \quad J_m(z, t) = \text{Re}(J_{m,\omega} e^{i\omega t - ikz}), \quad (134)$$

с учетом выражений (129), (131) и (128), получим следующую однородную систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} \omega(\omega - i\gamma) - k^2(v_F^2 + v_{\text{ED}}^2 K_0(ka)) & -k^2 v_{\text{ED}}^2 K_0(kd) \\ -k^2 v_{\text{ED}}^2 K_0(kd) & \omega(\omega - i\gamma) + k^2(v_F^2 + v_{\text{ED}}^2 K_0(ka)) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} J_{1,\omega} \\ J_{2,\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (135)$$

Решив систему, получим спектр плазменных волн в рассматриваемой системе из двух параллельных нанотрубок:

$$\omega(\omega - i\gamma) = k^2 [v_F^2 + v_{\text{ED}}^2 (K_0(ka) \pm K_0(kd))], \quad (136)$$

где знак “+” соответствует симметричной моде, когда заряды и токи в обеих нанотрубках одинаковы для одинаковых z , а знак “-” соответствует антисимметричной моде, которая распространяется в двухпроводных линиях. Учтя приближения (127), можно переписать дисперсионное уравнение для случая антисимметричных волн:

$$\omega(\omega - i\gamma) = k^2 \left[v_F^2 + v_{ED}^2 \ln \frac{d}{a} \right], \quad (137)$$

которое в силу отсутствия дисперсии фазовой скорости, соответствует волновой системе уравнений, некоторой двухпроводной линии. Скорость волн в этой линии должна быть равна

$$v_\phi^2 = v_F^2 + v_{ED}^2 \ln \frac{d}{a}, \quad (138)$$

причем погонная электрическая ёмкость имеет вполне определенное значение

$$C_E = \frac{1}{4 \ln(d/a)}, \quad a \ll d. \quad (139)$$

Далее можно формально определить величины L_K и C_Q , имеющие смысл погонной кинетической индуктивности и погонной квантовой ёмкости как

$$L_K = \frac{\pi \hbar}{2e^2 v_F}, \quad C_Q = \frac{2e^2}{\pi \hbar v_F}, \quad (140)$$

чтобы в двухпроводной линии с погонной индуктивностью L_K и погонной индуктивностью, состоящей их последовательно соединенных ёмкостей C_E и C_Q распространяющиеся электромагнитные волны имели фазовую скорость v_ϕ :

$$\frac{1}{L_K} \left[\frac{1}{C_E} + \frac{1}{C_Q} \right] = v_\phi^2. \quad (141)$$

Нетрудно убедиться, подставив выражения (140), будем иметь тождество. Заметим, что значение L_K , приводимое в работе [83] в два раза меньше полученного нами по формуле (140), а приводимое в работе [84] — в два раза больше рассчитанного нами. Такой разброс обусловлен различными способами вычисления скорости распространения плазменных волн в рассматриваемой системе. В двух указанных работах эта скорость вычисляется через значения квантовой ёмкости и кинетической индуктивности, которые в свою очередь определяются из недостаточно строгих соображений. В нашей же работе скорость волн определяется непосредственно из частотной зависимости поверхностной проводимости нанотрубки, уравнений Максвелла и геометрии системы, что является более строгим выводом, точность которого ограничивается только сделанными предположениями, упрощающими выкладки.

Симметричные волны в двухпроводной линии из углеродных нанотрубок также могут быть интересны с точки зрения изготовления плазменных резонаторов и детекторов модулированного терагерцевого излучения [72]. Однако, в силу наличия у них дисперсии фазовой скорости, такие волны не могут быть описаны локальными уравнениями (см. параграф 4.1) а в резонаторах на основе них могут играть суще-

ственную роль краевые эффекты. Возбуждение такого резонатора будет рассмотрено в последующих разделах этой главы.

4.2 Колебания электронной плазмы в полевом транзисторе с высокой подвижностью электронов и цилиндрическим затворным электродом

Как уже отмечалось в разделе 4.1, плазменные волны в 2d-ЭГ могут как иметь дисперсию фазовой скорости, так и не иметь ее в зависимости от экранирования 2d-ЭГ внешними металлическими электродами. В случае резонатора на основе волн, обладающих бездисперсионным спектром и описываемым локальными уравнениями, получение уравнения для эффективного элементарного осциллятора осуществляется достаточно просто (пример такого сведения приведен в разделе 3.2). В данном разделе будет рассмотрена система на основе полевого транзистора с высокой подвижностью электронов и цилиндрическим затворным электродом (см. рисунок 14). Ранее она была предложена в качестве детектора модулированного терагерцевого излучения [38]. Из сказанного в разделе 4.1 понятно, что эта система описывается нелокальными уравнениями, вследствие чего при ее ограниченном поперечном размере невозможно выписать в ней частное решение в виде бегущей волны

$$\sigma(x, t) = \sigma_{\omega} \exp(i\omega - ikx),$$

а если все же так сделать, приняв определенные допущения, делающие решение приближенным, мы сталкиваемся с необходимостью учета краевых эффектов, т.к., в частности, на границе двумерной электронной плазмы точное решение может иметь логарифмическую особенность [85]. В данном разделе будут представлены свойства рассматриваемой системы, рассчитанные на основе точного решения уравнений, описывающих в ней динамику электронной плотности. Также, будет показано, каким образом можно свести колебания электронной плазмы а данной распределенной системе к колебаниям эффективного элементарного осциллятора.

В рамках нашей модели мы предполагаем систему однородной и бесконечной в y -направлении, что означает равномерное распределение заряда вдоль затвора. При этом процесс перетекания заряда с подводящего провода на затвор и краевые эффекты в нем нами не рассматриваются. Таким образом, при постоянном напряжении смещения V_0 и переменной во времени составляющей потенциала между электродом и концами слоя, заданной в виде гармонического сигнала

$$\delta\varphi(t) = \text{Re}(\delta\varphi_{\omega} e^{i\omega t}) \quad (142)$$

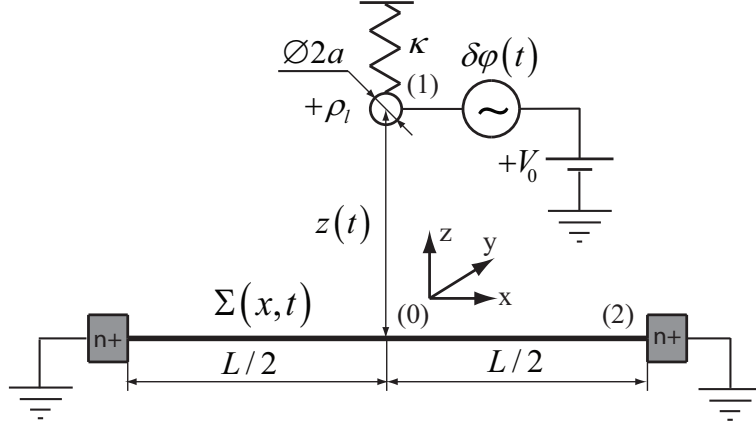


Рис. 14: Схематическое изображение транзистора на базе двумерного слоя высокоподвижных электронов с цилиндрическим наностержнем в качестве затвора.

где $\delta\varphi_\omega$ — его комплексная амплитуда, линейная плотность заряда ρ_l на затворе будет выражаться следующим образом:

$$\rho_l = \rho_l^{\text{ind}} + \rho_l^{\text{var}}(t), \quad (143)$$

где ρ_l^{ind} и $\rho_l^{\text{var}}(t)$ — статическая и переменная во времени составляющие линейной плотности заряда на затворе. Здесь ρ_l^{ind} обусловлена наличием ненулевого напряжения смещения V_0 , при этом

$$\rho_l^{\text{ind}} = c_l V_0, \quad (144)$$

где c_l — статическая ёмкость единицы длины системы слой-затвор, которая в частном для рассматриваемой задачи случае определяется соотношением:

$$c_l = \frac{1}{2 \ln \left(\frac{2z_0}{a} \right)}, \quad a \ll z_0, \quad z_0 \ll L, \quad (145)$$

где a — радиус затворного электрода; z_0 — расстояние между затвором и слоем 2d-ЭГ. Поскольку входной сигнал $\delta\varphi(t)$ мы будем считать заведомо малым, связь между ним и откликом на него $\rho_l^{\text{var}}(t)$ будет линейна, а сам отклик будет также гармоническим:

$$\rho_l^{\text{var}}(t) = \text{Re}(\rho_{l,\omega} e^{i\omega t}), \quad (146)$$

где $\rho_{l,\omega}$ — его комплексная амплитуда.

Поверхностный заряд электронов в слое 2d-ЭГ разобьем на следующие составляющие:

$$\Sigma(x, t) = -en_S + \sigma_{\text{ind}}(x) + \sigma(x, t) \quad (147)$$

где n_S — поверхностная концентрация свободных электронов в слое 2d-ЭГ при от-

существовании внешних полей, $\sigma_{\text{ind}}(x)$ — наведенная электронная плотность, которая в данном случае определяется формулой:

$$\sigma_{\text{ind}}(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{\rho_l^{\text{ind}} z_0}{x^2 + z_0^2} \quad a \ll z_0, \quad z_0 \ll L; \quad (148)$$

$\sigma(x, t)$ — переменная во времени составляющая электронной плотности.

Движение электронов в слое можно описать в приближении уравнений гидродинамики:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial (\Sigma u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{e}{m^*} E_x, \end{cases} \quad (149)$$

здесь u — гидродинамическая скорость потока электронов в 2d-ЭГ, γ и m^* — частота столкновений электронов и эффективная масса электрона в слое соответственно; E_x — электрическое поле, действующее на электроны в слое. Его удобно разделить на составляющие: $E_x = E_x^{\text{int}} + E_x^{\text{ext}}$, при этом E_x^{int} обусловлена только лишь зарядами слоя 2d-ЭГ, E_x^{ext} — всеми внешними зарядами, в данном случае — зарядами на затворе. Выпишем выражения для вычисления E_x^{int} и E_x^{ext} :

$$E_x^{\text{int}} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\sigma_{\text{ind}}(\xi)}{x - \xi} d\xi + \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\sigma(\xi, t)}{x - \xi} d\xi, \quad (150)$$

$$E_x^{\text{ext}} = \frac{2\rho_l^{\text{ind}} x}{z_0^2 + x^2} + \frac{2\rho_l^{\text{var}}(t) x}{z_0^2 + x^2}. \quad (151)$$

Первые слагаемые в выражениях (150) и (151) в сумме дают ноль, как и в статическом случае. Учтя это, а также линеаризуя уравнения (149), получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (-en_s + \sigma_{\text{ind}}(x)) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u + \frac{e}{m^*} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\sigma(\xi, t)}{x - \xi} d\xi = -\frac{e}{m^*} \frac{2\rho_l^{\text{var}}(t) x}{z_0^2 + x^2}. \end{cases} \quad (152)$$

Для решения поставленной задачи к этой системе необходимо добавить:

1. Соотношение, выражающее закон сохранения заряда:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \sigma(x, t) dx + \rho_l^{\text{var}}(t) = 0, \quad (153)$$

при этом соотношение между статическими зарядами на затворе и в слое 2d-ЭГ

$$\int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\text{ind}}(x) dx + \rho_l^{\text{ind}} = 0$$

также должно выполняться.

2. Условие для потенциала

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{E} d\bar{r} = \delta\varphi(t), \quad (154)$$

где \bar{r}_1 — радиус-вектор точки на поверхности затвора, \bar{r}_2 — точки на любом из краев слоя 2d-ЭГ, φ_1 и φ_2 — значения электрического потенциала в этих точках соответственно, \bar{E} — вектор напряженности электрического поля в системе, $\delta\varphi(t)$ определяется по формуле (142).

Решение данной задачи детально изложено в приложении А.4. Выполнив его, можно получить искомые зависимости $\sigma(x, t)$, $u(x, t)$ и $\rho_l(t)$. Также, связь между комплексными амплитудами возбуждающего потенциала $\delta\varphi_\omega$ и погонной плотности заряда на затворе $\rho_{l,\omega}$ получается в следующем виде:

$$\rho_{l,\omega} = C(\omega) \delta\varphi_\omega, \quad (155)$$

Соотношение (363) можно переписать в действительной форме, которая собой будет представлять амплитудно-фазовое соотношение между функциями $\rho_l^{\text{var}}(t)$ и $\delta\varphi_0(t)$:

$$\rho_l^{\text{var}}(t) = |C(\omega)| |\delta\varphi_\omega| \cos(\omega t + \arg[\delta\varphi_\omega] + \arg[C(\omega)]). \quad (156)$$

На рисунке 15 показаны зависимости модуля и аргумента комплексной функции $C(\omega)$ от частоты внешнего сигнала при различных добротностях колебаний. Величина Q , примерно равная добротности основного резонанса вычисляется как

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi^2 e^2 n_S}{m^* L}}, \quad (157)$$

отличие основной резонансной частоты от ω_0 обусловлено нелокальностью исходных уравнений и влиянием краевых эффектов.

Заметим, что при параметрах, для которых получена формула (145), а именно: $z_0 \ll L$ и $a \ll z_0$, при $\omega = 0$ значение функции $C(\omega)$ с большой степенью точности совпадает с c_l , погонной ёмкостью проводника радиусом a , расположенным на

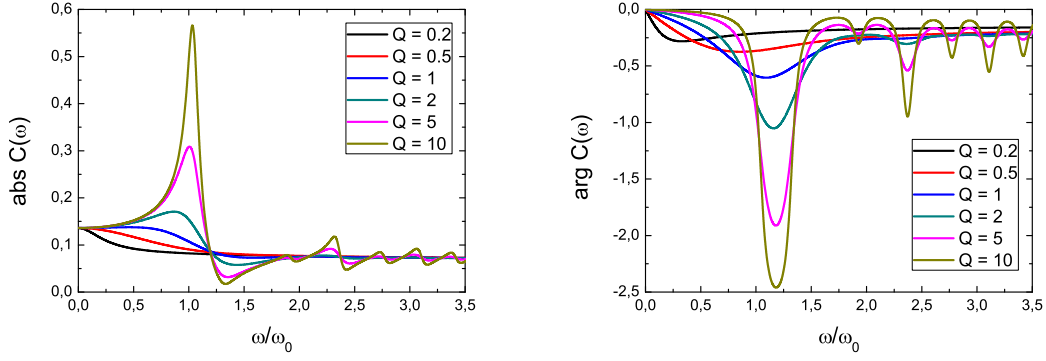


Рис. 15: Зависимости $|C(\omega)|$ и $\arg C(\omega)$ при $L = 1.0$ мкм, $z_0 = 100$ нм, $a = 5$ нм и различных величинах Q .

расстоянии z_0 над бесконечной идеально проводящей плоскостью. Так, для параметров $a = 1$ нм, $z_0 = 50$ нм и $L = 1.0$ мкм, получается $c_l = 0.1365$ и $C(0) = 0.1362$, что является подтверждением правильности проделанных вычислений. Другим способом проверить корректность выкладок можно, сравнив мощность, рассеиваемую в двумерном электронном газе, рассчитанную двумя разными способами. С одной стороны, она равна непосредственно омическим потерям в слое 2d-ЭГ и может быть выражена (на единицу длины затвора) следующим образом:

$$P_l^{\text{diss}} = \gamma m^* n_S \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \langle u(x, t)^2 \rangle dx = \frac{\omega |\delta\varphi_0|^2}{2} \times \Theta(\omega), \quad (158)$$

где $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по периоду времени, много большему $2\pi/\omega$. Функция $\Theta(\omega)$ при этом вычисляется как

$$\Theta(\omega) = Q^{-1} \frac{\omega}{\omega_0} |C(\omega)|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^2, \quad (159)$$

где U_j — безразмерные комплексные амплитуды Фурье-гармоник разложения скорости электронов в 2d-ЭГ (подробные выкладки приведены в приложении А.4). С другой стороны, средняя мощность, передаваемая системе источником переменного напряжения равна:

$$P_l^{\text{src}} = \langle \delta\varphi(t) \times \dot{\rho}(t) \rangle = -\frac{\omega |\delta\varphi_0|^2}{2} \text{Im}C(\omega). \quad (160)$$

В силу выполнения закона сохранения энергии, заведомо должно выполняться равенство $P_l^{\text{src}} = P_l^{\text{diss}}$. Это продемонстрировано на рисунке 16 слева, где практически невозможно различить зависимости $\Theta(\omega)$ и $-\text{Im}C(\omega)$. Анализируя зависимости $\Theta(\omega)$ при различных добротностях Q , представленных на рисунке 16 справа, для ве-

личины $\Theta_{\text{res},1} = \Theta(\omega_{\text{res},1})$, где $\omega_{\text{res},1}$ – основная (первая) резонансная частота, можно установить следующее эмпирическое соотношение:

$$\Theta_{\text{res},1} \propto Q, \quad Q \gg 1. \quad (161)$$

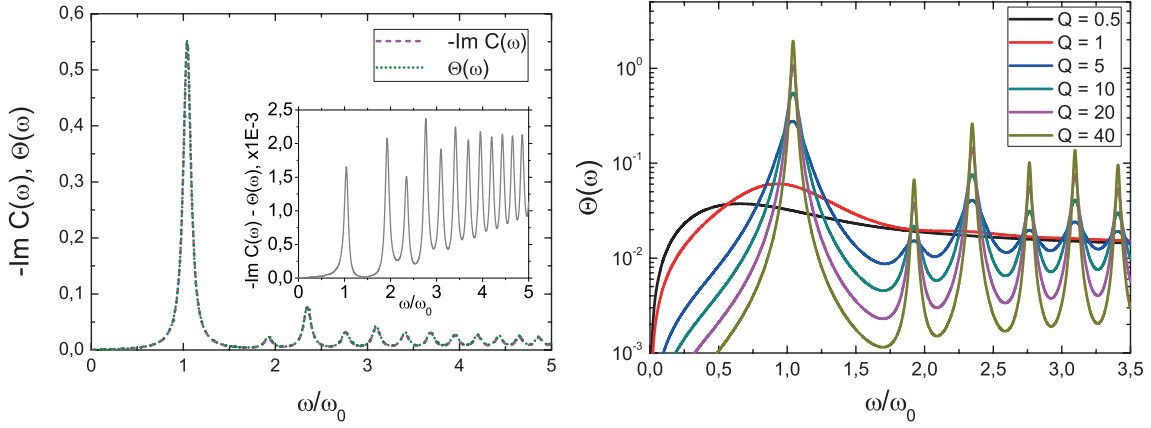


Рис. 16: Слева: зависимости $\Theta(\omega)$ и $\text{Im} C(\omega)$ при $Q = 10$, $L = 1.0$ мкм, $z_0 = 100$ нм и $a = 5$ нм; на вставке представлена разность между этими зависимостями. Справа: зависимости $\Theta(\omega)$ при различных величинах Q для случая когда $L = 1.0$ мкм, $z_0 = 100$ нм и $a = 5$ нм.

Такая зависимость объясняется тем фактом, что первый член разложений в ряд Лорана передаточных функций между возмущением $\delta\varphi_\omega$ и линейными функциями от соответствующего отклика $\sigma_\omega(x)$ и $u_\omega(x)$ всегда имеет вид

$$K_\omega = \frac{A}{\omega - \omega_{\text{res},n} - i\gamma/2}, \quad (162)$$

где A — константа, не зависящая от частоты, а $\omega_{\text{res},n}$ — резонансная частота с номером n . Действительно, если посмотреть на формулу (340) из приложения А.4, можно видеть, что Фурье-амплитуды скорости u_ω определяются из следующего матричного уравнения:

$$(M_{ij} - \Lambda I) u_{\omega,j} = \delta\varphi_\omega F_i, \quad (163)$$

где M_{ij} — симметричная матрица, I — единичная матрица, F_i — некоторый вектор, не зависящий от частоты, а через Λ обозначено выражение

$$\Lambda = \frac{\pi \omega (\omega - i\gamma)}{2 \omega_0^2}. \quad (164)$$

В силу симметрии матрицы M_{ij} , ее собственные значения Λ_i — действительны и имеют первую кратность. В результате выражения для компонент $u_{\omega,j}$ будет иметь вид дробно-рациональной функции от ω с нулями первой кратности в точках

$$\omega_j = \sqrt{\frac{2\Lambda_j}{\pi}}\omega_0 \pm i\frac{\gamma}{2}, \quad (165)$$

такой же вид с теми же полюсами в точках ω_j будут иметь компоненты $\sigma_{\omega,j}$, а также любые линейные функции от $u_{\omega,j}$ и $\sigma_{\omega,j}$. В частности, для погонного заряда на затворе из (162) методами, описанными в разделе 3.1 можно получить динамическое уравнение следующего вида:

$$\ddot{\rho}_l + \gamma\dot{\rho}_l + \omega_{\text{res},1}^2\rho_l = A \cdot \omega_{\text{res},1}^2\delta\varphi(t), \quad (166)$$

где A — некоторый коэффициент, зависящий от геометрии системы. Найти A можно из условия, что усредненная мощность, рассеиваемая в эффективном осцилляторе, определяемая по формуле (160) при основном резонансе $\omega = \omega_{\text{res},1}$ должна быть такой же, как и рассеиваемая в распределенном резонаторе при той же частоте. Тогда получим, что

$$A = \Theta_{\text{res},1} \frac{\gamma}{\omega_{\text{res},1}}. \quad (167)$$

На рисунке 17 показаны зависимости основной резонансной частоты $\omega_{\text{res},1}$ и соответствующего ей значения в резонансе $\Theta_{\text{res},1}$ от расстояния z_0 между слоем 2d-ЭГ и затворным электродом при различных его радиусах a . Из графика видно, что основная резонансная частота $\omega_{\text{res},1}$ по порядку величины равна ω_0 в достаточно широком диапазоне расстояний z_0 , при этом для $z_0 \ll L$ ее приращение пропорционально $\ln z_0$.

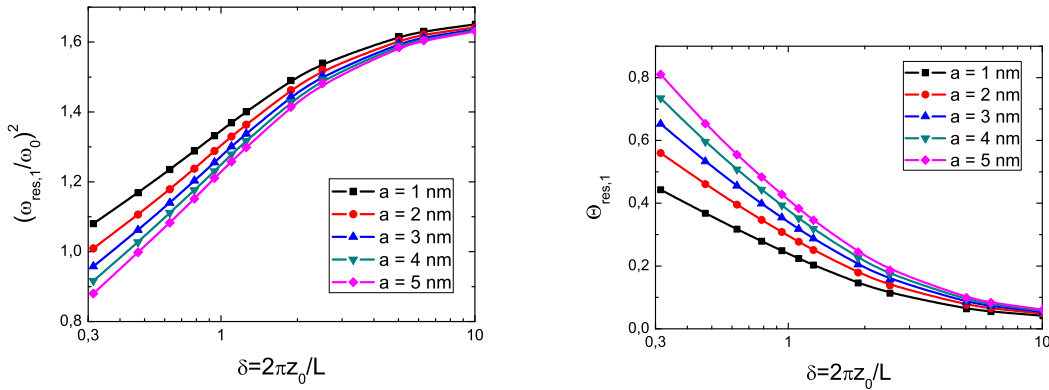


Рис. 17: Зависимости основной резонансной частоты $(\omega_{\text{res},1}/\omega_0)^2$ (слева) и соответствующего ей значения в резонансе $\Theta_{\text{res},1} = \Theta(\omega_{\text{res},1})$ (справа) от $\delta = 2\pi z_0/L$ при $Q = 10$, $L = 1$ мкм для различных значений радиуса затворного электрода a .

Если разделить уравнение (166) на множитель $A\omega_{\text{res},1}^2$ из правой части, то получим уравнение для колебаний погонной плотности заряда в некотором RLC контуре:

$$L_{Kl}\dot{\rho}_l + R_l\dot{\rho}_l + \frac{\rho_l}{C_l} = \delta\varphi(t), \quad (168)$$

где L_{Kl} , R_l и C_l — погонные индуктивность, сопротивление и емкость этого контура, которые при параметрах системы $L = 1$ мкм, $z_0 = 100$ нм, $a = 5$ нм, $Q = 10$, $\Theta_{\text{res},1} \approx 0.55$ и $\omega_{\text{res},1}/\omega_0 \approx 1.04$ можно выразить следующим образом:

$$L_{Kl} = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{Q}{\Theta_{\text{res},1}} \left(\frac{\omega_{\text{res},1}}{\omega_0} \right)^{-1} \approx 0.886 \frac{m^*L}{e^2n_S},$$

$$R_l = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\Theta_{\text{res},1}} \left(\frac{\omega_{\text{res},1}}{\omega_0} \right)^{-1} \approx 0.393 \sqrt{\frac{m^*L}{e^2n_S}},$$

$$C_l = \frac{\Theta_{\text{res},1}}{Q} \left(\frac{\omega_{\text{res},1}}{\omega_0} \right)^{-1} \approx 0.0529.$$

Элементарная же оценка этих параметров, выполненная по методу, изложенному в работе [38] даст следующие значения этих параметров:

$$L_{Kl} = 0.25 \frac{m^*L}{e^2n_S}, \quad R_l \approx 0.11 \sqrt{\frac{m^*L}{e^2n_S}}, \quad C_l = \frac{1}{2 \ln(2z_0/a - 1)} \approx 0.136, \quad (169)$$

при этом резонансная частота колебаний такого контура примерно равна рассчитанной частоте основного резонанса $\omega_{\text{res},1}$:

$$\frac{1}{\sqrt{L_{Kl}C_l}} \approx 1.22 \cdot \omega_0. \quad (170)$$

Мы видим, что грубая модель дает с точностью до порядка величины такие же параметры эффективного RLC контура, как и точный расчет. Тем не менее, грубая модель в силу своей предельной простоты может неверно предсказывать некоторые эффекты. Так, при близком расположении затвора транзистора к слою двумерного электронного газа (2d-ЭГ) и частотах, соответствующих четным по счету резонансам, пондеромоторная сила взаимодействия зарядов затвора и 2d-ЭГ направлена на их расталкивание, в то время как при нечетных резонансах она всегда имеет характер притяжения. Этот эффект пропадает при большом удалении затвора от слоя 2d-ЭГ — в таком случае они притягиваются при всех резонансах. Чтобы проиллюстрировать отличие случая четных резонансов от случая нечетных, на рисунке 18 представлены пространственные зависимости фазы в стоячих волнах плотности заряда в канале транзистора. Они построены для следующих параметров системы: длины канала транзистора $L = 1$ мкм, расстояния между осью затвора и слоем 2d-ЭГ $z_0 = 50$ нм, радиусом затвора $a = 5$ нм и добротности основного резонанса $Q = 10$.

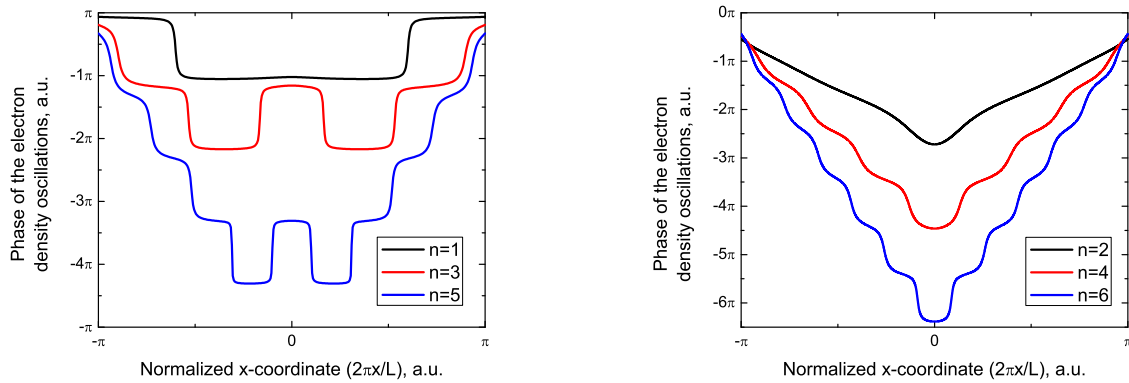


Рис. 18: Пространственные зависимости фазы колебаний электронной плотности в стоячей волне в канале полевого транзистора с цилиндрическим затворным электродом в случае первых трех а) нечетных мод, б) — четных.

Из рисунка видно, что в случае нечетных резонансов фаза колебаний при переходе через узел скачкообразно меняется на π как к в обыкновенной стоячей волне. В случае же четных резонансов фаза меняется непрерывно, что особенно выражено для второго по счету резонанса.

4.3 Вынужденные плазменные колебания в отрезке из одностенной углеродной нанотрубки с металлической проводимостью

В данном разделе будут рассмотрены плазменные колебания в отрезке ограниченной длины из одностенной углеродной нанотрубки с металлической проводимостью, а также их возбуждение непосредственно электрическим полем электромагнитной волны, в поле которой находится нанотрубка. Обычно задачи в подобной постановке встречаются в теории антенн, а их решение связано с получением интегрального уравнения Галлена для данной геометрии, и численным решением этого уравнения. Случай классической антенны отличается от рассматриваемого нами случая, когда металлическая ОСУНТ длиной порядка микрометра облучается волной терагерцевого диапазона. Это с одной стороны обусловлено резонансным возбуждением плазменных колебаний в ОСУНТ, которого не имеет места в обычной антенне, а также тем обстоятельством, что в рассматриваемом случае длина волны излучения много больше длины антенны, что не является штатным режимом ее работы из-за низкой эффективности. Однако, при данных условиях уравнения, описывающие такие колебания в металлических ОСУНТ, могут быть несколько упрощены в силу справедливости Кулоновского приближения при вычислении электрического поля, обу-

словленного движущимися зарядами в нанотрубке. В результате, электрическое поле в нанотрубке можно записать в следующем виде (см. выражение (129)):

$$E_z(z, t) = -\frac{\partial}{\partial z} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma(\zeta, t) d\zeta \int_0^{2\pi} \frac{a \cdot d\phi}{\sqrt{(\zeta - z)^2 + 4a^2 \sin^2(\phi/2)}} + E_{z,\omega} \cos \omega t, \quad (171)$$

где a — радиус нанотрубки, L — ее длина, $\sigma(z, t)$ — распределение плотности заряда вдоль нее, которое мы будем считать аксиально симметричным, ось Z направлена вдоль оси нанотрубки, ω — частота падающей электромагнитной волны, $E_{z,\omega}$ — амплитудное значение проекции переменного поля волны на ось Z . Также выпишем уравнения, определяющие транспорт заряда в металлической ОСУНТ (см. уравнения (124)) вместе с граничными условиями на ее концах:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0 \\ j + \gamma j + v_F^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{2e^2 v_F}{\pi^2 \hbar a} E_z, \end{cases} \quad (172)$$

$$j|_{z=\pm L/2} = 0.$$

Если принять во внимание тот факт, что дисперсия фазовой скорости (ее зависимость от волнового вектора) в металлической ОСУНТ достаточно слабая (см. дисперсионное соотношение (128)), то на основе выводов, сделанных в конце раздела 4.1, можно предположить, что краевые эффекты влияют слабо на решение уравнений (172). Тогда, считая что скорость плазменных волн в нанотрубке примерно постоянная, равная значению, полученному из закона дисперсии (128) при $k_\omega = \pi/L$, второе уравнение в системе (172) можно записать приближенно как

$$\dot{j} + \gamma j + v_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{v_{ED}^2}{4\pi a} E_{z,\omega} \cos \omega t, \quad v_0^2 = v_F^2 + v_{ED}^2 K_0\left(\frac{\pi a}{L}\right), \quad v_{ED}^2 = \frac{8e^2 v_F}{\pi \hbar}. \quad (173)$$

Далее, представив неизвестные функции $\sigma(z, t)$ и $j(z, t)$ в виде стоячих волн

$$\sigma(z, t) = \text{Re} [\sigma_\omega(z) e^{i\omega t}], \quad j(z, t) = \text{Re} [j_\omega(z) e^{i\omega t}], \quad (174)$$

для распределенной комплексной амплитуды тока $j_\omega(z)$ получим следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2 j_\omega}{dz^2} + k_\omega^2 j_\omega = -i\omega \frac{v_{ED}^2}{v_0^2} \frac{E_{z,\omega}}{4\pi a}, \quad k_\omega^2 = \frac{\omega(\omega - i\gamma)}{v_0^2}. \quad (175)$$

В результате, решением приближенной локальной системы уравнений при заданных граничных условиях будет:

$$\begin{aligned} j_\omega(z) &= \frac{i\omega v_{ED}^2}{k_\omega^2 v_0^2} \frac{E_{z,\omega}}{4\pi a} \left(\frac{\cos k_\omega z}{\cos k_\omega \frac{L}{2}} - 1 \right), \\ \sigma_\omega(z) &= \frac{1}{k_\omega} \frac{v_{ED}^2}{v_0^2} \frac{E_{z,\omega}}{4\pi a} \frac{\sin k_\omega z}{\cos k_\omega \frac{L}{2}}. \end{aligned} \quad (176)$$

Из полученных выражений следует, что полный ток через сечение нанотрубки и линейная плотность заряда на ней

$$I_\omega = 2\pi a \cdot j_\omega \quad \text{и} \quad \rho_\omega = 2\pi a \cdot \sigma_\omega$$

слабо зависят от радиуса нанотрубки, который входит в выражения для этих величин посредством выражения для v_0^2 , которое зависит от логарифма a . Отсюда также следует, что мощность омических потерь, рассеиваемая в нанотрубке слабо зависит от a . Действительно, рассеиваемая в нанотрубке мощность равна

$$P = 2\pi a \int_{-L/2}^{L/2} j E_z dz = \frac{2\gamma}{v_{ED}^2} \int_{-L/2}^{L/2} I^2 dz. \quad (177)$$

Вычислим мощность, которая рассеивается в нанотрубке, когда частота падающего излучения совпадает с основной резонансной частотой плазменных колебаний в нанотрубке, равной $\omega_{\text{res},1} = \pi v_0/L$:

$$P_{\text{res},1} = \frac{\gamma}{v_{ED}^2} \int_{-L/2}^{L/2} |I_\omega(z)|^2 dz \approx \omega_{\text{res},1} \frac{2 |E_{z,\omega}|^2 L^3}{\pi^4} \left(\frac{v_{ED}}{v_0} \right)^2 Q_e, \quad (178)$$

где $Q_e = \omega_{\text{res},1}/\gamma$ — добротность основного резонанса, выражение получено с точностью до членов первого порядка по Q_e .

Для проверки правильности полученных формул (176) и (178) решим задачу о возбуждении вынужденных плазменных колебаний в нанотрубке другим способом, учитывающим краевые эффекты. Суть данного решения заключается в получении интегрального уравнения для нахождения распределения тока по длине нанотрубки в наиболее простой форме. Такое уравнение в случае антенны из цилиндрической поверхности с конечной проводимостью называется уравнением Поклингтона (см. [86]). В отличие от уравнений (172), в которые входит член, пропорциональный v_F^2 , учитывающий сжимаемость газа Ферми (даже в случае нейтральных частиц), уравнение Поклингтона получается только для случая проводимости поверхности антенны, не

имеющей пространственной дисперсии, т.е. для проводимости вида (122), зависящей только от частоты электрического поля, но не от длины волны. Для ОСУНТ с металлической проводимостью оно записывается следующим образом:

$$\int_{-L/2}^{L/2} I_{\omega}(z') D(z - z') dz' = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - \frac{i\omega}{k^2} E_{z,\omega}, \quad (179)$$

где $k = \omega/c$ — волновой вектор падающей волны в вакууме, C_1 и C_2 — неопределенные коэффициенты, $D(z)$ — ядро интегрального уравнения, равное

$$D(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(-ik\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi/2)}\right)}{\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi/2)}} d\phi - \frac{i\omega \sin k|z|}{\tilde{s}_{zz} 2k}, \quad (180)$$

в которое входит функция проводимости нанотрубки \tilde{s}_{zz} :

$$I_{\omega} = \tilde{s}_{zz} E_{z,\omega}, \quad \tilde{s}_{zz} = \frac{4e^2 v_F}{\pi \hbar} \times \frac{1}{i\omega + \gamma}, \quad (181)$$

здесь в качестве $E_{z,\omega}$ понимается полное электрическое поле в рассматриваемой точке нанотрубки.

Уравнение (179) обычно (см., например, [86, 87]) решается путем представления интеграла в нем в виде конечной суммы и решения полученной в результате системы линейных уравнений относительно $I_{\omega}(z_i)$, где z_i — точки разбиения отрезка $[-L/2 .. L/2]$. Такой способ решения легко реализуется на практике в случае, приближенного ядра

$$D(z) \approx \frac{\exp\left(-ik\sqrt{z^2 + a^2}\right)}{\sqrt{z^2 + a^2}},$$

который дает результат с приемлемой точностью в случае тонких нанотрубок $a \ll L$. Однако, практика использования такого способа показывает, что численное решение заметно зависит от количества точек N , на которые разбивается отрезок нанотрубки. При этом при больших N , когда длина отрезков разбиения становится порядка и меньше радиуса нанотрубки, численное решение начинает расходиться.

Использование точного выражения для ядра уравнения непосредственно в этом методе решения затруднительно, поскольку ядро сингулярно в точке $z = 0$. Тем не менее, данный метод решения можно адаптировать также и для решения с использованием точного выражения для ядра [88]. В данной диссертации был использован другой, более простой, быстрый и точный метод решения уравнения подобного вида, в котором неизвестная функция представляется суммой ряда Фурье с неизвестными коэффициентами, которые находятся из системы линейных уравнений, получаемой

из исходного интегрального уравнения (см. подробное описание в приложении А.5). На рисунке 19 представлены полученные различными способами зависимости абсолютной величины максимального тока в середине нанотрубки от частоты падающего излучения, а также рассчитанные этими способами распределения тока по длине нанотрубки при частотах основного резонанса.

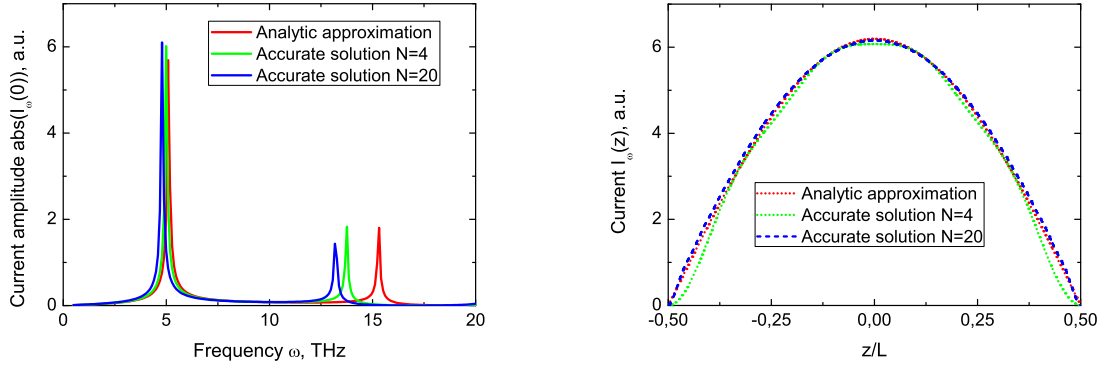


Рис. 19: Слева: зависимости абсолютного значения тока в середине нанотрубки от частоты падающей волны, справа: распределения действительной части тока в нанотручке при частотах основного резонанса, мнимые части при этом оказываются пренебрежимо малыми, ввиду чего не показаны. Здесь “analytic approximation” обозначает использование формулы (176) для получения данных зависимостей, “accurate solution” — использование метода решения интегрального уравнения путем разложения искомой функции в ряд Фурье, в котором N обозначает количество используемых гармоник. Параметры нанотрубки следующие: длина $L = 500$ нм, радиус $a = 1$ нм, частота столкновений электронов $\nu = 0.5 \times 10^{12} \text{ c}^{-1}$.

Из графиков видно, что приближенное описание рассматриваемой системы локальными уравнениями дает мало отличающийся результат по сравнению с точным численным решением. При этом само численное решение очень быстро сходится по мере увеличения числа используемых гармоник N . Так, уже при $N = 4$ оно дает частотную зависимость амплитуды колебаний тока при частотах вблизи основного резонанса мало отличающуюся от зависимостей, получающихся при больших N . Также следует заметить, что несовпадение положений основных резонансов, получаемых из аналитического выражения и с использованием численного метода при больших N обусловлено членом ν_F^2 в уравнениях (172), который не учитывается в точном численном решении. При его учете фазовая скорость волны получается несколько больше, в результате чего получаются несколько большие резонансные частоты, что мы можем наблюдать, сравнивая положения основных резонансов на графике.

Таким образом, можно заключить, что использование приближенной локальной системы уравнений (172) применительно к тонким ОСУНТ длиной порядка микрометра и радиусом в несколько нанометров, в случае их облучения электромагнитным

излучением терагерцевого диапазона, является вполне оправданным. Наличие простых аналитических выражений типа (176) для нахождения распределения зарядов и токов в ОСУНТ ограниченной длины сильно упрощает моделирование и оценку характеристик устройств, которые могут быть созданы на их основе.

4.4 Выводы

- Двумерные и одномерные плазменные волноведущие системы описываются преимущественно нелокальными уравнениями. Исключения составляют двух- и много- проводные линии из близко расположенных и экранирующих друг друга таких систем, а также однопроводные линии, экранированные хорошо проводящими металлическими электродами.
- Адекватное представление плазменных резонаторов на основе двумерного электронного газа, описывающихся нелокальными уравнениями, в терминах эквивалентных электрических цепей, является нетривиальной задачей, решение которой без предварительного точного анализа исходной плазменной системы, по всей видимости, не представляется возможным.
- Волноведущие системы, изначально описываемые нелокальными уравнениями, которые имеют отличную на логарифмический множитель от линейной дисперсию фазовой скорости, в некоторых случаях могут быть приближенно описаны локальной системой уравнений.

5 Пример расчета характеристик наноэлектромеханического детектора модулированного терагерцевого излучения

В главе 2 рассматривался ряд схем МЭМ/НЭМ детекторов модулированного терагерцевого излучения. Во всех таких устройствах происходит резонансное возбуждение механического кантилевера с частотой модулирующего сигнала. Механическая деформация кантилевера приводит к изменению электрической ёмкости в устройстве, переменная составляющая которой может быть преобразована в электрический сигнал. Одной общей характерной особенностью устройств, упомянутых в параграфе 2 является то, что выходной сигнал в них снимается в виде наведенного переменного тока, протекающего в основной цепи устройства из-за меняющейся во времени электрической ёмкости, что схематично представлено на рисунке 20 слева.

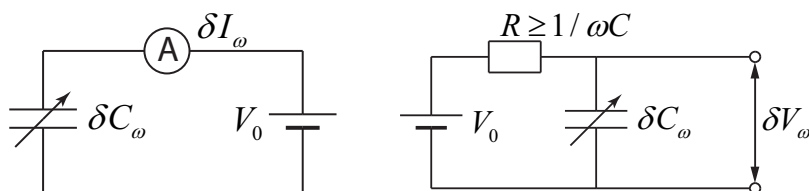


Рис. 20: Две системы детектирования переменной ёмкости: по величине наведенного переменного тока (слева), и по наведенному переменному напряжению (справа).

В данном случае сигнал на выходе устройства пропорционален амплитуде колебаний абсолютного значения ёмкости:

$$\delta I_{\omega} = V_0 \cdot \delta C_{\omega}. \quad (182)$$

Не смотря на то, что ёмкости в рассматриваемых устройствах достаточно малы и имеют порядок нескольких фемтофарад, получаемые по оценкам значения чувствительности ~ 100 мА/Вт сравнимы и даже превосходят чувствительности других детекторов терагерцевого излучения, используемых в настоящее время [41, 42].

Добиться еще больших показателей чувствительности возможно при использовании более эффективной схемы снятия выходного сигнала, изображенной на рисунке 20 справа. В ней благодаря большому значению сопротивления в цепи постоянного напряжения, по сравнению с реактивным сопротивлением конденсатора, заряд на нем не успевает стекать в цепь питания за время порядка периода колебаний ёмкости $2\pi/\omega$. В результате заряд остается запертым на конденсаторе, переменная составляющая разности потенциалов на котором пропорциональна амплитуде колебаний относительного изменения ёмкости:

$$\delta V_{\omega} = -V_0 \times \frac{\delta C_{\omega}}{C_0}. \quad (183)$$

Как будет видно из расчета, терагерцевый детектор, в котором реализуется такой способ снятия выходного сигнала может иметь при комнатной температуре чувствительность, большую, чем самые лучшие микроболометры, которые являются в настоящее время рекорсменами по данной характеристике.

Наиболее адаптируемой для съема выходного сигнала в виде наведенного напряжения является ранее упомянутая нами схема НЭМ детектора модулированного терагерцевого излучения на основе четвертьволнового отрезка двухпроводной линии из двух одностенных углеродных нанотрубок (см. рисунок 5, а также работу [89]). Модифицированная схема представлена на рисунке 21.

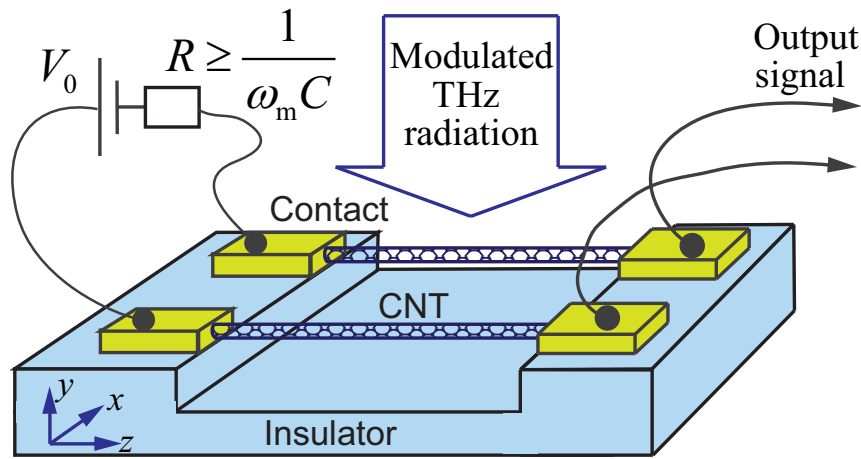


Рис. 21: Модифицированная схема детектора модулированного терагерцевого излучения, в которой выходным сигналом является наведенное в результате колебаний электрической ёмкости напряжение.

Плазменные волны в двух параллельных отрезках из нанотрубок в данной схеме возбуждаются непосредственно электрическим полем падающей терагерцевой волны. При этом необходимо, чтобы подложка, над которой натянута нанотрубки была непроводящей, т.к. в противном случае электрическое поле отраженной от нее волны будет полностью ослаблять результирующее поле, которое возбуждает плазменные волны в нанотрубках. В отличие от исходной схемы детектора на основе четвертьволнового отрезка двухпроводной линии, в которой возбуждается антисимметричная волна, в модифицированной схеме в нанотрубках возбуждается волна симметричная (см. параграф 4.1). Сила отталкивания, действующая между нанотрубками, пропорциональна квадрату амплитуды колебаний заряда на них. В результате, модулирующий сигнал может быть выделен в виде механических колебаний нанотрубок, если его спектр попадает в полосу механического резонанса.

Согласно принципам моделирования подобных устройств, кратко сформулированным в начале этой главы, для расчета характеристик детектора, изображенного на рисунке 21, необходимо выполнить следующие действия:

- Выбрать эффективные величины, которые характеризуют распределенные колебания плазменного и механического резонаторов как колебания эффективных элементарных осцилляторов. Для механического резонатора это делается стандартным способом, изложенным в параграфе 3.3. Для плазменного резонатора выбор может варьироваться, но делаться он должен на основе полученного точного решения задачи о возбуждении плазменных колебаний в рассматриваемой системе.
- Получение точного решения о возбуждении плазменного резонатора, выражающее собой связь в частотном пространстве между распределенными колеблющимися величинами и внешним воздействием, вызывающим эти колебания. В случае рассматриваемого нами здесь устройства внешним воздействием является электрическое падающей волны $E(t)$.
- Получение уравнения колебаний эффективного элементарного осциллятора, описывающего колебания в плазменном резонаторе при частотах возбуждения, находящихся в полосе выбранного его резонанса.
- Вычисление изменения частоты выбранного плазменного резонанса при малых деформациях механического резонатора.
- Вычисление изменения электрической ёмкости в устройстве при малых деформациях механического резонатора.

В результате выполнения всех этих пунктов можно получить систему уравнений описывающую колебания двух связанных осцилляторов — низкочастотного механического и высокочастотного плазменного. При заданном значении амплитуды электрического поля падающей волны можно будет рассчитать амплитуду колебаний механического осциллятора и мощность, которая рассеивается в устройстве. Отношение этих величин даст нам чувствительность детектора. Зная параметры входящих в систему осцилляторов, можно найти спектр шумовых колебаний и соответствующий им шум выходного сигнала, а вместе с ним и мощность, эквивалентную шуму. Также, из полученной системы уравнений вида емкостного датчика (14) можно определить величину пороговой амплитуды электрического поля падающего излучения, выше которой параметрически возбуждаются механические колебания нанотрубок.

5.1 Решение задачи о возбуждении плазменных колебаний в детекторе

Как отмечалось ранее, в случае если колебания в резонаторе описываются локальными уравнениями, решение задачи о его вынужденных колебаниях не представляет существенной трудности, причем в некоторых случаях для его получения достаточно иметь одно лишь дисперсионное соотношение для бегущих волн в этом резонаторе (см. параграф 3.2). Сам вид дисперсионного уравнения позволяет установить, описывается система локальными уравнениями, или нелокальными. В случае симметричной волны, бегущей вдоль двух одинаковых нанотрубок радиусом a , расположенных параллельно, так, что расстояние между их осями равно d , дисперсионное уравнение следующее:

$$\omega(\omega - i\gamma_e) = k^2 v_\phi^2, \quad v_\phi^2 = v_F^2 + v_{\text{ED}}^2 (K_0(ka) + K_0(kd)), \quad v_{\text{ED}}^2 = \frac{8e^2 v_F}{\pi \hbar}, \quad (184)$$

где γ_e — частота электронных столкновений в нанотрубках, v_F — скорость Ферми. Если бы это уравнение было следствием некоторой конечной линейной системы уравнений относительно Фурье-образов колеблющихся в системе величин (плотности заряда $\rho_{\omega k}$ и тока $I_{\omega k}$ в рассматриваемом случае) такой, чтобы коэффициенты при них представляли бы конечные линейные комбинации выражений вида $(i\omega)^m \cdot (ik)^n$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$, с действительными коэффициентами, то в исходном (z, t) пространстве можно было бы записать локальную систему дифференциальных уравнений относительно искомых распределенных колеблющихся величин $\rho(z, t)$ и $I(z, t)$. Как видно из приведенного дисперсионного уравнения, в силу того, что в нем присутствует трансцендентная функция K_0 , в аргумент которой входит волновой вектор k , даже с учетом того, что в рассматриваемом случае аргумент K_0 мал и можно использовать приближенное соотношение

$$K_0(x) \approx -\ln x, \quad x \ll 1,$$

дисперсионное уравнение не может быть получено из конечной линейной локальной системы уравнений.

Однако, тот факт, что в дисперсионное уравнение входит логарифмическая зависимость от k , которая меняется достаточно медленно, дает нам возможность приближенно считать аргумент константой, положив k равным характерному значению, равному π/L — устройство работает на основном плазменном резонансе, при котором на длине волны системы укладывается примерно половина длины плазменной волны. Насколько отличное от точного решение получается при использовании такого при-

ближения можно судить по различию между приближенным и точным решением в случае возбуждения падающей электромагнитной волной плазменных волн в отрезке из одной одностенной углеродной нанотрубки. Эта задача была рассмотрена в параграфе 4.3, в котором приведены результаты приближенного и точного решений. Из графиков на рисунке 19 видно, что приближенное и точное решения дают близкие друг к другу частотные зависимости вблизи основного резонанса. Таким образом, можно заключить, что сделанное приближение внесет малый вклад в результирующие характеристики устройства: чувствительность, мощность эквивалентную шуму и порог неустойчивости.

Локальная система уравнений, описывающая плазменные колебания в системе из двух ОСУНТ, аналогично тому, как это было сделано в случае одной нанотрубки в параграфе 4.3, получается следующая:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \gamma_e I + v_\phi^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = v_{\text{ED}}^2 E_z(t), \end{cases} \quad (185)$$

где $I(z, t)$ — суммарный ток протекающий через сечения двух нанотрубок с координатой z , $\rho(z, t)$ — суммарная линейная плотность заряда на нанотрубках, v_ϕ и v_{ED} определяются выражениями (184). С учетом граничных условий на концах нанотрубок

$$I|_{z=\pm \frac{L}{2}} = 0, \quad (186)$$

где L — их длина, для гармонического входящего сигнала

$$E_z(t) = \text{Re} [E_{z,\omega} e^{i\omega t}] \quad (187)$$

ища решение системы уравнений в виде

$$\rho(z, t) = \text{Re} [\rho_\omega(z) e^{i\omega t}], \quad I(z, t) = \text{Re} [I_\omega(z) e^{i\omega t}], \quad (188)$$

можем найти распределенные комплексные амплитуды колебаний $\rho_\omega(z)$ и $I_\omega(z)$:

$$\begin{aligned} I_\omega(z) &= \frac{i\omega v_{\text{ED}}^2}{k^2 v_\phi^2} E_{z,\omega} \left(\frac{\cos kz}{\cos k\frac{L}{2}} - 1 \right), \\ \rho_\omega(z) &= \frac{1}{k} \frac{v_{\text{ED}}^2}{v_\phi^2} E_{z,\omega} \frac{\sin kz}{\cos k\frac{L}{2}}, \end{aligned} \quad (189)$$

где k — волновой вектор бегущей волны, определяемый из дисперсионного соотно-

шения:

$$k = \frac{\sqrt{\omega(\omega - i\gamma_e)}}{v_\phi}. \quad (190)$$

Как видно из полученных решений, благодаря наличию в знаменателе выражения $\cos(kL/2)$, отклик будет иметь резонансные пики, определяемые соотношением

$$\frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

5.2 Получение уравнения колебаний элементарного осциллятора, соответствующего плазменному резонатору

Рассмотрим полученное выражение $\rho_\omega(z)$ при частотах, близких к основному резонансу. В рассматриваемом нами случае, когда его добротность велика, мнимая часть вектора k много меньше действительной в этом диапазоне частот. Ею можно пренебречь во всех местах, где встречается волновой вектор, за исключением косинуса в знаменателе, поскольку он отвечает за наличие резонансного отклика. Поскольку добротность считается большой, резонансная полоса мала по сравнению с резонансной частотой, следовательно k в пределах резонансной полосы меняется слабо и во всех местах, не отвечающих за резонанс волновой вектор можно считать константой, т.е. $k = \pi/L$. Выпишем теперь $\rho_\omega(z)$ в виде произведения двух множителей, один из которых зависит только от частоты, а другой — только от координаты:

$$\rho_\omega(z) = q_\omega \times \sin \frac{\pi z}{L}, \quad q_\omega = \frac{L v_{\text{ED}}^2}{\pi v_\phi^2} \frac{E_{z,\omega}}{\cos k \frac{L}{2}}. \quad (191)$$

Здесь величина q_ω представляет собой линейную плотность заряда на правом конце нанотрубок в частотном пространстве. Можно видеть, что эта скалярная величина ($q(t)$ во временном пространстве и q_ω в частотном), полностью определяет распределенные колебания плотности заряда в системе, в случае если спектр колебаний лежит в пределах полосы резонанса. Эту величину q мы и будем считать скалярным “смещением” эффективного элементарного осциллятора. Используя приближенное соотношение (74), можем переписать соотношение в частотном пространстве между q_ω и $E_{z,\omega}$ следующим образом:

$$q_\omega = \frac{4L v_{\text{ED}}^2}{\pi^2 v_\phi^2} \frac{\omega_e^2 \cdot E_{z,\omega}}{\omega_e^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_e}, \quad \omega_e = \frac{\pi v_\phi}{L}, \quad (192)$$

где ω_e — частота основного плазменного резонанса. Данному соотношению в частотном пространстве соответствует связь посредством следующего дифференциального уравнения во временном пространстве:

$$\ddot{q} + \gamma_e \dot{q} + \omega_e^2 q = \frac{4L}{\pi^2} \frac{v_{\text{ED}}^2}{v_\phi^2} \omega_e^2 \cdot E_z(t), \quad (193)$$

которое представляет собой уравнение колебаний эффективного элементарного осциллятора, соответствующего исходному распределенному плазменному резонатору.

5.3 Получение уравнения колебаний элементарного осциллятора, соответствующего механическому резонатору

В параграфе 3.3 было показано, что в случае кантилевера, на который действует переменная распределенная сила, которая представляется в виде

$$f_l(z, t) = g(z) f_l(t), \quad (194)$$

эквивалентное уравнение элементарного осциллятора можно записать в следующем виде:

$$\ddot{y} + \gamma_m \dot{y} + \omega_m^2 y = \eta \frac{f_l(t)}{m_l}, \quad \eta = \int_{-0.5}^{0.5} g(z) \psi_1(z) d\left[\frac{z}{L}\right], \quad (195)$$

где ω_m и γ_m — частота и константа затухания механических колебаний, m_l — погонная масса кантилевера, $\psi_1(z)$ — нормированная функция прогиба кантилевера, соответствующая основной собственной частоте колебаний. Собственные функции $\psi_n(z)$ зависят от типа закрепления кантилевера. Для двойного консольного закрепления они определяются выражениями (85)–(94).

В рассматриваемом нами устройстве расстояние между нанотрубками много меньше их длины, поэтому можно считать, что поперечная составляющая распределенной силы, расталкивающей нанотрубки равна:

$$f_l(z, t) = \frac{\rho^2(z, t)}{2d}, \quad (196)$$

где учтено что ρ — это суммарный заряд на обеих нанотрубках, а также то, что прогиб нанотрубок в процессе работы устройства много меньше расстояния между ними d . Согласно соотношению (191), распределенную силу можно представить в виде:

$$f_l(z, t) = f_l(t) g(z), \quad f_l(t) = \frac{q^2}{2d}, \quad g(z) = \sin^2 \frac{\pi z}{L}. \quad (197)$$

Таким образом, получаем следующее уравнение колебаний эквивалентного элементарного механического осциллятора:

$$\ddot{y} + \gamma_m \dot{y} + \omega_m^2 y = \frac{\eta q^2}{2m_1 d}, \quad (198)$$

где коэффициент связи η имеет следующее выражение:

$$\eta = \int_{-0.5}^{0.5} \sin^2\left(\frac{\pi z}{L}\right) \psi_1(z) d\left[\frac{z}{L}\right] \approx 0.438, \quad (199)$$

при этом величину прогиба нанотрубки в данной точке в любой момент времени можно найти из выражения

$$y(z, t) = y(t) \psi_1(z). \quad (200)$$

5.4 Вычисление изменения основной частоты плазменного резонанса при малой деформации нанотрубок

Уравнения (193) и (195), описывающие колебания в плазменном и механическом резонаторах являются связанными, причем взаимно, т.е. колебания заряда в плазменном резонаторе вызывают силу отталкивания, которая раскачивает механический резонатор, и в то же время колебания механического резонатора вызывают изменение геометрии системы, что влияет на плазменные колебания. Для написания общей системы уравнений с учетом влияния колебаний механического резонатора на колебания плазменного вычислим как изменяется частота плазменного резонанса при малых деформациях нанотрубок, т.е. когда $y(t)/d \ll 1$. При этом расстояние между центрами сечений нанотрубок с координатой z будет определяться выражением

$$d_1(z, t) = d + 2y(t) \cdot \psi_1(z). \quad (201)$$

Рассчитывая плазменные колебания в нанотрубках при учете их деформации можно считать, что $y(t) = \text{const}$, поскольку период механических колебаний много больше периода плазменных. Определить резонансную частоту колебаний в такой системе, которая описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \gamma_e I + (v'_\phi)^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} = v_{\text{ED}}^2 E_z(t), \end{cases} \quad (202)$$

где

$$(v'_\phi)^2 = v_F^2 + v_{\text{ED}}^2 \theta(z), \quad \theta(z) = K_0 \left(\frac{\pi a}{L} \right) + K_0 \left(\frac{\pi \cdot d(z)}{L} \right) \quad (203)$$

при граничных условиях $I|_{z=\pm L/2} = 0$. Учитывая что $2y \ll d$, можем записать:

$$\theta(z) = \theta_0 - \frac{2y \cdot \psi_1(z)}{d_0}, \quad \theta_0 = K_0 \left(\frac{\pi a}{L} \right) + K_0 \left(\frac{\pi d_0}{L} \right), \quad (204)$$

тогда

$$(v'_\phi)^2 = v_\phi^2 - v_{\text{ED}}^2 \frac{2y \cdot \psi_1(z)}{d}, \quad v_\phi^2 = v_F^2 + v_{\text{ED}}^2 \theta_0. \quad (205)$$

Выполнив преобразование Фурье уравнений (202) и исключив из них плотность заряда, получим уравнение для распределения тока:

$$I_{zz} + k^2(z) I = -i\omega \left(\frac{v_{\text{ED}}}{v_\phi} \right)^2 E_{z,\omega}, \quad k(z) = \frac{\sqrt{\omega(\omega - i\gamma_e)}}{v'_\phi}. \quad (206)$$

Поскольку относительное изменение фазовой скорости плазменных волн v'_ϕ мало, решение для собственных волн можно записать следующим образом:

$$I \propto e^{\pm i \int_0^z k(\xi) d\xi}. \quad (207)$$

Выполнив преобразования, можно получить все те же формулы, что были получены в случае недеформированных нанотрубок, только при этом во всех тригонометрических функциях необходимо заменить kz на $\int_0^z k(\xi) d\xi$. В результате, можно выписать соотношение для нахождения основной частоты собственных колебаний нанотрубок когда они деформированы:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} k(\xi) d\xi = \frac{\pi}{2}. \quad (208)$$

Подставив выражение для k , получим:

$$\frac{\omega'_e}{v_\phi} \left(\frac{L}{2} + \zeta \frac{v_{\text{ED}}^2 y}{v_\phi^2 d} \times \frac{L}{2} \right) = \frac{\pi}{2}. \quad (209)$$

где

$$\zeta = \int_{-0.5}^{0.5} \psi_1(z) d \left[\frac{z}{L} \right] \approx 0.831, \quad (210)$$

получим соотношение для определения частоты ω'_e плазменных колебаний при нали-

чии деформации нанотрубок:

$$1 - \frac{\omega_e'}{\omega_e} = \zeta \frac{v_{ED}^2 y}{v_\phi^2 d}. \quad (211)$$

С учетом того, что собственная частота плазменных колебаний меняется при деформации нанотрубок система уравнений, описывающая связанные колебания механического и плазменного резонаторов записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{y} + \gamma_m \dot{y} + \omega_m^2 y = \frac{\eta q^2}{2m_l d} \\ \ddot{q} + \gamma_e \dot{q} + \omega_e^2 q \left(1 - 2\zeta \frac{v_{ED}^2 y}{v_\phi^2 d} \right) = \frac{4L v_{ED}^2}{\pi^2 v_\phi^2} \omega_e^2 \cdot E_z(t). \end{cases} \quad (212)$$

В дальнейшем, если не оговорено специально, основные параметры устройства будем считать следующими: длина нанотрубок $L = 500$ нм, их радиус $a = 1$ нм, и расстояние между их осями $d = 20$ нм. Скорость Ферми в одностенных нанотрубках $v_F \approx 8.74 \times 10^7$ см/с и частота электронных столкновений — $\gamma_e \approx 0.5 \times 10^{12}$ с⁻¹ [83]. Частоту плазменного резонанса получаем равной $\omega_e \approx 6.1$ ТГц, а его добротность $Q_e = \omega_e/\gamma_e \approx 74$. Добротность механических колебаний возьмем равной $Q_m = \omega_m/\gamma_m = 10^3$, что является типичным значением для углеродных нанотрубок [90]. Частоту их колебаний оценим на основании формулы (104) и данных, представленных в работе [91], в которой нанотрубка длиной 800 нм и радиусом 1.6 нм имела частоту собственных колебаний 132 МГц. Для тонкостенной трубки жесткость на изгиб $J_b \propto a^3$, а погонная масса $m_l \propto a$, следовательно, в соответствии с упомянутой формулой, для частоты изгибных колебаний ненапрянутой нанотрубки должно выполняться соотношение: $\omega_m \propto a/L^2$, откуда для нанотрубки рассматриваемых длины и радиуса получим $\omega_m \approx 0.2$ ТГц. Погонную массу нанотрубки можно определить как массу единицы площади графена, умноженную на $2\pi a$, длину окружности сечения нанотрубки, в результате найдем $m_l \approx 4.78 \times 10^{-14}$ г/см.

5.5 Вычисление порога параметрической неустойчивости

В параграфе 2.3 обсуждалось, что система уравнений, описывающая емкостной датчик и подобные ему системы при некоторой амплитуде сигнала, возбуждающего высокочастотный электрический резонатор, становится неустойчивой, что соответствует параметрическому возбуждению колебаний механического низкочастотного резонатора с его собственной частотой. Как мы видим, системы уравнений (212) и (14) полностью идентичны, за исключением знаков перед квадратичным членом выражающим механическую силу, действующую на кантилевер, а также знаком приращения собственной частоты высокочастотного резонатора при увеличении координаты,

определяющей смещение эквивалентного элементарного механического осциллятора. Аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.3 в случае системы (14), можно вычислить для системы (212) пороговое значение амплитуды входящего сигнала, выше которой в системе возникает параметрическая неустойчивость:

$$E_{\text{th}}^2 = \frac{\pi^4}{\sqrt{3}\eta\zeta} \frac{m_l \omega_e^2}{n Q_e^4 Q_m} \left(\frac{v_\phi}{v_{\text{ED}}} \right)^6 \frac{d^2}{L^2}, \quad (213)$$

где $n = \omega_e/\omega_m$ — отношение основной собственной частоты плазменного резонатора к частоте механического. Как было показано в приложении А.1, в рассматриваемом случае, когда $n \gg Q_e$, нам не требуется более точное определение порога неустойчивости, чем то, которое дается вышеприведенной приближенной аналитической формулой. Подставив численные значения параметров, получим величину пороговой амплитуды электрического поля 875 В/см, что соответствует интенсивности падающего линейно поляризованного вдоль нанотрубок излучения интенсивностью 1 кВт/см². Такое электрическое поле может быть получено в малой области фидера терагерцевой антенны при падении на нее излучения с интенсивностью порядка сотен мВт/см². Однако, как будет оценено ниже, в случае когда механические колебания в системе возбуждаются входящим модулированным сигналом, характерная амплитуды несущей волны, при которой амплитуда колебаний нанотрубок становится настолько большой, что они начинают биться друг о друга, равна 50 В/см, что много меньше порога возникновения параметрической неустойчивости. Таким образом, при работе детектора модулированного терагерцевого излучения возможность возникновения параметрической неустойчивости можно исключить, поскольку даже при сильном усилении падающего излучения, существенно раньше в системе нанотрубки начнут сталкиваться друг с другом из-за большой амплитуды колебаний.

5.6 Вычисление электрической ёмкости двух нанотрубок при их малой деформации

Как было отмечено в начале этого параграфа, для вычисления выходного электрического сигнала рассматриваемого детектора необходимо определить, как меняется электрическая ёмкость конденсатора, образуемого двумя нанотрубками при их деформации в процессе работы устройства. Поскольку $y \ll d$, а также $a \ll d \ll L$, можно разбить нанотрубки вдоль оси z на отрезки малой длины dz , такой что $d \ll dz \ll L$, на которых изменение прогиба нанотрубок невелико, и получить множество параллельно соединенных конденсаторов, состоящих из двух длинных параллельных недеформированных нанотрубок. Общая их электрическая ёмкость, отнесенная к длине L , будет равна:

$$c'_l = c_l - 4c_l^2 \frac{2y}{d} \zeta, \quad \zeta = \int_{-0.5}^{0.5} \psi_1(z) d \left[\frac{z}{L} \right] \approx 0.831, \quad (214)$$

или, относительное изменение ёмкости будет равно:

$$\frac{\delta c_l}{c_l} = \frac{c'_l - c_l}{c_l} = -8\zeta c_l \frac{y}{d}. \quad (215)$$

Напомним, что выходной сигнал в виде наведенного напряжения пропорционален относительному изменению ёмкости между нанотрубками (см. формулу (183)).

5.7 Результаты вычислений характеристик детектора

Рассчитаем амплитуду механических колебаний в системе при ее облучении модулированным терагерцевым излучением, в котором компонента электрического поля, направленная вдоль нанотрубок, зависит от времени как

$$E_z(t) = E_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t, \quad (216)$$

где E_0 и ω — амплитуда и частота несущей волны, Ω — частота модулирующего сигнала, m — глубина модуляции. При условии, что амплитуда несущей волны мала, можем заведомо считать, что в системе не происходит параметрического возбуждения механических колебаний (см. параграф 2.3), а также, что амплитуда вынужденных механических колебаний мала, т.е. $y \ll d$. Тогда во втором уравнении системы (212) y можно считать константой, после чего легко найти зависит от времени величина q :

$$q(t) = \frac{4E_0 L v_{\text{ED}}^2}{\pi^2 v_\phi^2} \times \text{Re} \left[G_e(\omega) e^{i\omega t} + \frac{m}{2} (G_e(\omega - \Omega) e^{i(\omega - \Omega)t} + G_e(\omega + \Omega) e^{i(\omega + \Omega)t}) \right], \quad (217)$$

где $G_e(\omega)$ — комплексная передаточная функция, соответствующая плазменному осциллятору:

$$G_e(\omega) = \frac{\omega_e^2}{\omega_e^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_e}. \quad (218)$$

При этом, учитывая что $\Omega \ll \gamma_e$, можно считать, что $G_e(\omega - \Omega) \approx G_e(\omega + \Omega) \approx G_e(\omega)$. Используя это приближение, можно найти низкочастотную составляющую сигнала $q^2(t)$:

$$\langle q^2(t) \rangle = \frac{16E_0^2 L^2}{\pi^4} \left(\frac{v_{\text{ED}}}{v_\phi} \right)^4 \frac{m}{2} |G_e(\omega)|^2 \cos \Omega t, \quad (219)$$

независящая от времени составляющая при этом не представляет для нас интереса. Далее, подставив это выражение в правую часть уравнения для механического осциллятора, найдем зависимость $y(t)$:

$$y(t) = \frac{4m\eta}{\pi^4} \frac{E_0^2 L^2}{m_l \omega_m^2 d} \left(\frac{v_{ED}}{v_\phi} \right)^4 |G_e(\omega)|^2 \operatorname{Re} [G_m(\Omega) e^{i\Omega t}], \quad (220)$$

где $G_m(\omega)$ — комплексная передаточная функция, соответствующая механическому осциллятору:

$$G_m(\omega) = \frac{\omega_m^2}{\omega_m^2 - \omega^2 + i\omega\gamma_m}. \quad (221)$$

Максимальной амплитуда колебаний нанотрубок будет в том случае, когда несущая частота входящего сигнала попадает в резонанс плазменных колебаний, а частота модуляции — в резонанс механических, в таком случае амплитуда колебаний y_0 будет равна:

$$y_0 = \frac{4m\eta}{\pi^4} \frac{E_0^2 L^2}{m_l \omega_m^2 d} \left(\frac{v_{ED}}{v_\phi} \right)^4 Q_e^2 Q_m, \quad (222)$$

где $Q_e = \omega_e/\gamma_e$ и $Q_m = \omega_m/\gamma_m$ — добротности плазменного и механического резонансов. С помощью этой формулы можно оценить амплитуду электрического поля падающей волны $E_{0,\max}$, при которой амплитуда колебаний нанотрубок будет настолько велика, что они начнут ударяться друг о друга, т.е. $y_0\psi_1(0)$ должно быть равно $d/2$:

$$[E_{0,\max}]^2 = \frac{\pi^4}{8m\eta\psi_1(0)} \frac{m_l \omega_m^2 d^2}{Q_e^2 Q_m L^2} \left(\frac{v_\phi}{v_{ED}} \right)^4. \quad (223)$$

Подставив численные значения параметров, и взяв в качестве глубины модуляции условное значение $m = 0.1$, получим $E_{0,\max} \sim 50$ В/см, что соответствует интенсивности падающего излучения 4 Вт/см².

Амплитуду выходного сигнала детектора δV_Ω при двойном плазменном и механическом резонансах можно найти, зная y_0 и используя формулы (183) и (215):

$$\delta V_\Omega = \frac{32m\zeta\eta c_l}{\pi^4} \frac{E_0^2 L^2}{m_l \omega_m^2 d^2} \left(\frac{v_{ED}}{v_\phi} \right)^4 Q_e^2 Q_m V_0, \quad (224)$$

где V_0 — опорное постоянное напряжение. Чтобы найти чувствительность детектора, необходимо вычислить мощность P_Σ , которую он поглощает из падающего на него электромагнитного поля. Ее можно разделить на три составляющие: мощность омических потерь в нанотрубках P_e , мощность, затрачиваемую на компенсацию механических сил трения P_m при их колебаниях, и мощность, переизлучаемую систе-

мой P_{rad} .

Мощность, поглощаемая детектором и его чувствительность Начнем с вычисления мощности механических диссипативных сил. Из уравнения (80) следует, что диссипативная сила, действующая на единицу длины кантилевера равна $f_{\text{diss},l} = m_l \gamma_m \dot{y}(z, t)$, тогда мгновенная мощность диссипативных потерь во всем кантилевере будет определяться интегралом:

$$P_m(t) = \int_{-L/2}^{L/2} m_l \gamma_m \dot{y}^2(z, t) dz. \quad (225)$$

Считая, что колеблется только одна основная мода, т.е. $y(z, t) = y(t) \psi_1(z)$ и учитывая нормировку базисной функции $\psi_1(z)$, легко получить:

$$P_m(t) = m_l L \gamma_m \dot{y}^2(t) \quad (226)$$

Для гармонических колебаний $y(t) = \text{Re} [y_0 e^{i\Omega t}]$ получим среднюю мощность диссипативных потерь

$$P_m = \langle P_m(t) \rangle = \gamma_m m_l L \frac{\Omega^2 |y_0|^2}{2}. \quad (227)$$

Подставив в эту формулу $\Omega = \omega_m$, и выражение (222) для y_0 , а также учтем, что в нашей системе колеблются две нанотрубки получим выражение для мощности диссипативных потерь в механическом колебательном контуре при одновременно механическом и плазменном резонансах:

$$P_m = \frac{16m^2 \eta^2}{\pi^8} \frac{E_0^4 L^5}{m_l \omega_m d^2} \left(\frac{v_{ED}}{v_\phi} \right)^8 Q_e^4 Q_m. \quad (228)$$

Далее, найдем мощность, потребляемую плазменным резонатором. Она расходуется на компенсацию омических потерь в нанотрубках, а также на излучение электромагнитных волн. Из системы уравнений (185) можно получить следующее выражение для мгновенной мощности диссипативных потерь в нанотрубках:

$$P_e(t) = \frac{\gamma_e}{v_{ED}^2} \int_{-L/2}^{L/2} I^2(z, t) dz. \quad (229)$$

Поскольку в рассматриваемом детекторе глубина модуляции должна быть много меньше 1, можно считать, что диссипация энергии связана только с несущей гармоникой, две боковые при этом вносят относительный вклад, пропорциональный m^2 , которым можно пренебречь. В таком случае для $I(z, t)$ можно записать выражение:

$$I(z, t) = \text{Re} [I_\omega(z) e^{i\omega t}], \quad (230)$$

где $I_0(z)$ определяется по формулам (189). С использованием величины q_ω , амплитуды колебаний эквивалентного элементарного осциллятора, выражение для $I_\omega(z)$ записывается следующим образом:

$$I_\omega(z) = \frac{i\omega}{k} q_\omega (\cos kz - \cos kL/2). \quad (231)$$

Далее, подставив (231) и (230) в (229) с учетом того, что при рассматриваемом случае большой добротности плазменного резонанса можно пренебречь мнимой частью волнового вектора k , среднее значение рассеиваемой мощности будет следующим:

$$P_e = \langle P_e(t) \rangle = \gamma_e \frac{|q_\omega|^2 L}{4} \left(\frac{v_\phi}{v_{ED}} \right)^2 \quad (232)$$

Подставив в эту формулу резонансное амплитудное значение q_ω из выражения (217), получим:

$$P_e = \omega_e \frac{4E_0^2 L^3}{\pi^4} \frac{v_{ED}^2}{v_\phi^2} Q_e. \quad (233)$$

Отношение рассеиваемой мощности в механическом резонаторе к рассеиваемой в плазменном оказывается равной:

$$\frac{P_m}{P_e} = \frac{4m^2 \eta^2}{\pi^4} \frac{E_0^2 L^2}{m_l \omega_e^2 d^2} \left(\frac{v_{ED}}{v_\phi} \right)^6 Q_e^3 Q_m n, \quad (234)$$

где $n = \omega_e/\omega_m$ — отношение собственных частот плазменного и механического резонаторов. Для вышеприведенных параметров устройства, при амплитуде возбуждающего электрического поля 50 В/см, что соответствует максимальному значению, при котором нанотрубки начинают ударяться друг о друга при колебаниях, получаем $P_m/P_e \sim 10^{-6}$.

Для нахождения мощности, которая рассеивается устройством в виде излучения, можно использовать формулу, известную их теории антенн:

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2} I^2 Z_{\text{in}}, \quad (235)$$

где I — амплитуда тока, в среднем сечении нанотрубок (в точке $z = 0$), Z_{in} — входной импеданс антенны, образуемой нанотрубками, которую для оценки можно считать диполем Герца:

$$Z_{\text{in}} = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2, \quad \lambda = \frac{2\pi\omega}{c}. \quad (236)$$

Амплитуда тока I в случае резонансного возбуждения колебаний равна:

$$I = \frac{2}{\pi^3} \omega_e E_0 L^2 \left(\frac{v_{\text{ED}}}{v_\phi} \right)^2 Q_e. \quad (237)$$

Подставляя ее в выражение для мощности, получим:

$$P_{\text{rad}} = \frac{4}{3\pi^3} \omega_e E_0^2 L^3 \frac{v_{\text{ED}}}{v_\phi} \left(\frac{v_{\text{ED}}}{c} \right)^3 Q_e^2. \quad (238)$$

Отношение этой мощности, к мощности омических потерь равно

$$\frac{P_{\text{rad}}}{P_e} = \frac{\pi}{3} \frac{v_\phi}{v_{\text{ED}}} \left(\frac{v_{\text{ED}}}{c} \right)^3 Q_e. \quad (239)$$

Для рассматриваемых параметров системы это отношение составляет порядка 10^{-4} .

Таким образом, было получено, что мощность, механических диссипативных сил, а также мощность, переизлучаемая нанотрубками, много меньше мощности омических потерь в плазменном резонаторе, и можно считать, что $P_\Sigma \approx P_e$. Отношение величины выходного сигнала детектора к поглощаемой мощности называется чувствительностью и равно

$$\mathcal{R}_V = \frac{\delta V_\Omega}{P_\Sigma} \approx \frac{8m\eta\zeta c_l}{\pi} \frac{V_0}{m_l \omega_m^2 v_\phi d^2} \left(\frac{v_{\text{ED}}}{v_\phi} \right)^2 Q_e Q_m. \quad (240)$$

При опорном напряжении $V_0 = 250$ мВ и остальных параметрах системы, указанных выше, получаем R_V порядка 10^6 В/Вт. Такую высокую чувствительность не имеет ни один из детекторов, работающих при комнатной температуре, приведенных в обзорной части диссертации. Заметим, что мощность, поглощаемая устройством при падении на него излучения с амплитудой $E_{0,\text{max}}$, при которой нанотрубки начнут сталкиваться друг с другом, равна 6 нВт.

Оценка шумовых характеристик детектора Другой важной характеристикой детектора является мощность, эквивалентная шуму, которую можно вычислить как отношение спектральной плотности шума выходного сигнала к чувствительности. Шум выходного сигнала можно разделить на две составляющие, первая из которых обусловлена шумом электрической цепи, вторая — механическими флуктуационными колебаниями кантилеверов. Оценить шум электрической цепи можно используя формулу Найквиста:

$$(V_e^2)_\omega = 4kTR, \quad (241)$$

где k_B — постоянная Больцмана, R — активное сопротивление цепи, которое в рассматриваемой схеме в наибольшей степени обусловлено наличием высокоомного резистора в цепи опорного напряжения. Как говорилось ранее, это сопротивление должно быть порядка величины реактивного сопротивления конденсатора, образуемого нанотрубками на частоте механических колебаний:

$$R \gtrsim \frac{1}{\omega_m c_l L} \approx 160 \text{ М}\Omega.$$

Таким образом, для резистора сопротивлением $R = 200 \text{ М}\Omega$ будем иметь плотность шума $\sqrt{(V_e^2)} = 1.6 \mu\text{V}/\sqrt{\text{Гц}}$ при температуре $T = 300 \text{ К}$.

Для определения составляющей спектра шума выходного сигнала, обусловленной флуктуациями положения механических осцилляторов (нанотрубок), необходимо вычислить спектральную плотность флуктуаций эффективного смещения осцилляторов y . Это можно сделать применив флуктуационно-диссипативную теорему, которая связывает спектральную плотность флуктуаций некоторого параметра состояния системы y с его функцией линейного отклика α_ω на внешнее воздействие:

$$(y^2)_\omega = -\frac{2k_B T}{\omega} \times \text{Im}\alpha_\omega, \quad (242)$$

причем упомянутое внешнее воздействие f должно быть обобщенной силой по отношению к параметру y , т.е. эта сила f , умноженная на вариацию параметра y должна давать работу, совершаемую над системой:

$$\delta A = f \cdot \delta y. \quad (243)$$

Как было отмечено в разделе 3.3, наборы величин y_j и $L \cdot f_{lj}$, представляют собой соответственно векторы обобщенных координат кантилевера и обобщенных сил, действующих на него. Напомним, y_j и f_{lj} являются коэффициентами разложения функции прогиба кантилевера и действующей на него распределенной силы по базисным функциям, соответствующих прогибу кантилевера при его собственных колебаниях. Таким образом, функция линейного отклика амплитуды основной колебательной моды нанотрубок y равна:

$$\alpha_\omega = \frac{\eta}{m_l L} \frac{1}{\omega_m^2 - \omega^2 + i\gamma_m \omega}, \quad (244)$$

тогда для спектральной плотности флуктуаций величины y , имеем следующее выражение:

$$(y^2)_\omega = \frac{2\eta k_B T}{m_l L} \frac{\gamma_m}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + \gamma_m^2 \omega^2}. \quad (245)$$

Максимальную плотность этот шум имеет внутри резонансной полосы механического резонанса и равен

$$(y^2)_{\omega, \max} = \frac{2\eta k_B T}{m_l L \omega_m^2 \gamma_m}. \quad (246)$$

Заметим, что вклад в шумовые колебания нанотрубок, обусловленный действием случайной силы, взаимодействия между флуктуирующими зарядами в нанотрубках, ничтожно мал по сравнению со значением, получаемым по формуле (246) и им можно заведомо пренебречь. Таким образом, используя формулы (183) и (215), можно переписать спектральную плотность механических флуктуаций $(y^2)_\omega$ в шум выходного напряжения:

$$(V_m^2)_\omega = 2 \left(V_0 \frac{4\zeta c_l}{d} \right)^2 (y^2)_\omega, \quad (247)$$

где учтено, что случайные колебания двух рассматриваемых нанотрубок абсолютно некоррелированы друг с другом. В результате, максимальное значение спектральной плотности шума выходного сигнала будет равно:

$$(V_m^2)_{\omega, \max} = (8\zeta c_l V_0)^2 \frac{\eta k_B T}{m_l L \omega_m^2 d^2 \gamma_m}. \quad (248)$$

Подставив численные значения параметров в это выражение, получим $\sqrt{(V_m^2)_\omega} = 16 \mu V / \sqrt{\text{Hz}}$. Сравнив значения составляющих плотностей шума, видим, что шум сопротивления электрической цепи намного меньше шума, обусловленного флуктуационными колебаниями нанотрубок, таким образом первой составляющей можно пренебречь:

$$\sqrt{(V^2)_\omega} = \sqrt{(V_m^2)_\omega + (V_e^2)_\omega} \approx \sqrt{(V_m^2)_\omega}. \quad (249)$$

Далее, получим такой параметр детектора, как мощность, эквивалентная шуму, разделив спектральную плотность шума выходного сигнала на чувствительность:

$$\text{NEP} = \frac{\sqrt{(V^2)_\omega}}{\mathcal{R}_V} = \frac{1}{m Q_e Q_m} \sqrt{\frac{m_l L \omega_e^2 \omega_m^2 d^2 k_B T}{\eta \gamma_m}} \left(\frac{v_\phi}{v_{ED}} \right)^2 \approx 4 \times 10^{-12} \frac{\text{W}}{\sqrt{\text{Hz}}}. \quad (250)$$

Приведенный расчет показывает, что рассматриваемый наноэлектромеханический детектор модулированного терагерцевого излучения имеет шумовые характеристики

как у самых лучших микроболометров, работающих при комнатной температуре, упомянутых в параграфе 1.1.

В данном параграфе в качестве примера была приведена последовательная реализация метода расчета характеристик некоторой конкретной схемы НЭМ детектора модулированного терагерцевого излучения. Изложенные в диссертации принципы моделирования таких устройств подразумевают выполнение ряда пунктов, каждый из которых представляет собой однозначно поставленную задачу, которая может быть решена точно для данной конкретной схемы устройства. Такие пункты, как вычисление изменения электрической ёмкости в системе и смещение собственной частоты плазменных колебаний при малых деформациях кантилеверов, а также вычисление распределения погонной силы, действующей на кантилеверы, были выполнены приближенно, поскольку геометрия системы позволяла сделать такие приближения, а конечная цель проделанных расчетов была не в определении истинных значений характеристик рассматриваемого устройства, а оценки этих значений с точностью до порядка величины. Случай, когда требуется точно решить подобные три задачи о нахождении смещения собственной частоты плазменных колебаний и изменения электрической емкости в системе при отклонении кантилевера, а также силы, действующей в плазменном резонаторе на кантилевер, был подробно разобран в работе автора диссертации [71] и не представляет сложности в постановке задачи получения ее точного численного решения. Также, при решении задачи о вынужденных колебаниях электронной плотности в нанотрубках исходная система нелокальных уравнений была заменена на приближенную локальную, что позволило получить оценку всех найденных характеристик устройства в аналитическом виде. Нахождение точного решения возможно аналогично тому, как это делалось в случае одной нанотрубки в параграфе 4.3 и также не представляет принципиально сложной задачи. Таким образом, изложенные принципы моделирования микроэлектромеханических детекторов модулированного терагерцевого излучения предоставляют исследователю универсальный подход для описания и расчета характеристик целого класса разнообразных устройств, объединяемых принципом работы МЭМ/НЭМ детекторов, а также многих других устройств, таких как ёмкостные и оптомеханические детекторы малых сил, смещений и масс.

5.8 Выводы

По результатам моделирования и расчета характеристик НЭМ детектора терагерцевого излучения на основе системы из двух ОСУНТ со схемой снятия выходного сигнала в виде наведенного напряжения можно отметить следующее:

- Предлагаемая в детекторе схема снятия выходного сигнала в виде наведенного

напряжения позволяет исключить контактное сопротивление из цепи плазменного резонатора, вследствие чего достигается большее значение добротности плазменного резонанса.

- Такой детектор имеет чувствительность порядка 10^6 В/Вт при мощности, эквивалентной шуму 10^{-12} Вт/ $\sqrt{\Gamma_{\text{ц}}}$, что соответствует наилучшим характеристикам микроболометров, работающим при комнатной температуре.
- Вследствие большой частоты колебаний механического резонатора и относительно невысокой его добротности (1000), он может быть использован в системах коммуникации с пропускной способностью до 0.1 Мбит/с.
- При работе данной схемы в качестве демодулятора терагерцевого сигнала возможность возникновения параметрической неустойчивости можно не рассматривать, ввиду высокого значения пороговой интенсивности входящего сигнала.
- В детекторе возможно наблюдение параметрической неустойчивости при относительно реальных значениях интенсивности падающего монохроматического терагерцевого излучения порядка 1 Вт/см², в случае помещения нанотрубок в узкую область фидера терагерцевой антенны.

Заключение

В диссертации изложены основные принципы моделирования наноэлектромеханических детекторов модулированного терагерцевого излучения. Реализация этих принципов показана на примере детектора на основе двух параллельных одностенных углеродных нанотрубок. Основным отличием данного устройства от тех, которые были ранее представлены в публикациях, является возбуждение плазменных колебаний в нанотрубках непосредственно падающим электрическим полем. Это исключает влияние контактного сопротивления между металлическим контактом и нанотрубкой на добротность плазменных колебаний, вследствие чего достигается большая чувствительность детектора. Также, достоинством такой схемы является то, что в ней возможно снятие выходного сигнала детектора в виде наведенного переменного напряжения, в то время, когда в ранее рассматриваемых авторами устройствах выходным сигналом являлся наведенный переменный ток, характерная амплитуда которого измеряется десятками пикоампер, в силу малой электрической емкости как нано-, так и микроразмерных конденсаторов, входящих в рассматриваемые МЭМ/НЭМ детекторы.

Оценка характеристик данной схемы детектирования дает значения чувствительности $\sim 10^6$ В/Вт и мощности, эквивалентной шуму $\sim 10^{-12}$ Вт/ $\sqrt{\text{Гц}}$, при комнатной температуре. Такими показателями обладают самые лучшие микроболометры, представляемые в публикациях последних лет, которые были приведены в обзорной части диссертации. При этом микроболометры имеют время релаксации порядка 10^{-2} секунды, что является недостаточным, например, для использования их в средствах коммуникации. Детекторы другого типа, такие как диоды Шоттки и детекторы на основе полевых транзисторов, при своем времени релаксации $10^{-10} \div 10^{-11}$ секунды имеют существенно меньшую чувствительность, порядка $10^2 \div 10^3$ В/Вт. У наноэлектромеханических детекторов время релаксации соответствует времени затухания механических колебаний кантилевера, которое в случае используемых в рассматриваемом устройстве нанотрубок равно $\sim 10^{-5}$ секунды. Такие параметры наноэлектромеханических детекторов открывают возможности для их использования, в частности, в качестве средств коммуникации с автоматическими устройствами субмиллиметрового размера.

Существует множество устройств, как электромеханических, так и оптомеханических, работающих по принципу емкостного датчика. Также, может быть предложено большое количество других схем, которые будут работать по этому принципу. Подход, предлагаемый в диссертации, позволяет описывать все эти устройства универсальным образом и находить их характеристики с большой точностью (в случае, когда низкочастотный и высокочастотный резонаторы, входящие в схему устройства

имеют высокие добротности).

В диссертации на нескольких примерах показано, что знание комплексной функции линейного частотного отклика резонансной системы позволяет найти для нее дифференциальное уравнение колебаний эквивалентного элементарного осциллятора. Также показывается, что нахождение функции отклика системы часто оказывается простой задачей в случае, если колебания в ней описываются локальными уравнениями. В случае же нелокальных уравнений данная задача может потребовать существенно больших вычислительных ресурсов. Являются ли описывающие резонансную систему уравнения локальными, и могут ли они приближенно считаться таковыми, можно установить из вида дисперсионного соотношения для волн, распространяющихся в ней. В отдельном параграфе приведены дисперсионные соотношения для плазменных волн, распространяющихся в основных электронных системах, которые могут использоваться в рассматриваемых наноэлектромеханических детекторах.

На примере возбуждения плазменных колебаний, в двух разных системах, описываемых нелокальными уравнениями, проиллюстрировано различие между результатом вычисления на основе точного расчета и приближенного анализа. В случае полевого транзистора с высокой подвижностью электронов и цилиндрическим затворным электродом оказалось, что параметры эквивалентного элементарного осциллятора, полученные в рамках грубой модели с точностью до порядка совпадают с параметрами, полученными в результате точного расчета. Тем не менее, представленная грубая модель, в том числе ее адаптация путем введения подгоночных параметров, не может быть использована для вычисления параметров эффективных осцилляторов, соответствующих высшим резонансам (с номером больше 1-го), а также для последующего вычисления распределения плотности заряда в устройстве (необходимого, например, для вычисления силы, действующей на затворный электрод). Также, из точного решения видно, что распределение фазы колебаний в стоячих волнах электронной плотности в канале транзистора, соответствующих четным по счету резонансам, имеет принципиально отличный вид от распределения в обычной стоячей волне, где фаза скачком меняется на π при переходе от полуволны к полуволне. В случае задачи о возбуждении плазменных колебаний в отрезке одностенной углеродной нанотрубки было проведено сравнение результатов, получаемых при решении исходной нелокальной системы уравнений, и приближенной локальной системы. Сравнение показывает, что приближенная локальная система уравнений с достаточной степенью точности описывает динамику электронной плотности в нанотрубке вплоть до частот, выше основного плазменного резонанса (но ниже второй резонансной частоты). Это может быть объяснено тем обстоятельством, что логарифмическое выражение, входящее в дисперсионное уравнение плазменных волн, нали-

чие которого обусловлено нелокальными далекодействующими взаимодействиями в системе, является медленно меняющейся функцией, которую приближенно можно считать константой, тем самым заменив нелокальные взаимодействия эффективными локальными.

В рамках линейной модели кантилевера, описываемого уравнением колебаний упругой линии, на примере дважды консольно закрепленной углеродной нанотрубки, точно вычислены параметры эквивалентного элементарного механического осциллятора. Оказалось, что эффективные величины, описывающие смещение координаты осциллятора и силу, действующую на него, являются обобщенной координатой и обобщенной силой в том смысле, как это понимается в теоретической механике. Это является удобным обстоятельством, которое, в частности, позволяет использовать флуктуационно-диссипативную теорему в ее непосредственном виде для вычисления распределения спектральной плотности флуктуационных колебаний кантилевера.

С помощью метода связанных колебаний в системе уравнений, описывающей как МЭМ/НЭМ детекторы, так и другие устройства, работающие по такому же принципу, вычислены пороговые значения амплитуды входящего высокочастотного гармонического сигнала в зависимости от его расстройки от собственной частоты высокочастотного осциллятора, выше которых в системе возникает параметрическая неустойчивость. Представленный анализ учитывает смещение положения равновесия низкочастотного осциллятора вследствие действия на него усредненной (пондеромоторной) силы. Из-за этого эффекта зависимость порога амплитуды от расстройки имеет сдвиг по частоте, который не учитывался прежде в публикациях других авторов. Исследование схемы детектора модулированного терагерцевого излучения на основе двух параллельных нанотрубок на предмет возникновения в ней параметрической неустойчивости показывает, что минимальное значение интенсивности излучения, при котором может проявиться этот эффект на порядок превосходит условное значение интенсивности модулированного сигнала, при котором нанотрубки начинают биться друг о друга из-за большой амплитуды колебаний.

А Приложения

А.1 Вычисление порогов неустойчивости системы уравнений ёмкостного датчика с помощью метода связанных колебаний

Обезразмеренная система уравнений, описывающая емкостной датчик и остальные аналогичные ему по принципу работы устройства имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \mu_{\tau\tau} + 2\tilde{\beta}_1\mu_\tau + \tilde{\omega}_1^2\mu = -\rho^2 \\ \rho_{\tau\tau} + 2\tilde{\beta}_2\rho_\tau + \tilde{\omega}_2^2\rho(1 + \mu) = \Lambda \cos(\tau + \Phi_0), \end{cases} \quad (251)$$

Прежде чем вводить нормальные координаты, определим положение равновесия механического резонатора при учёте пондеромоторной силы, возникающей вследствие включения генератора. Считая $\mu = \mu_0 = \text{const}$, из второго уравнения системы (251) получаем:

$$\rho = \frac{f}{D_2(1, \mu_0)} \exp(i\tau) + \frac{f^*}{D_2^*(1, \mu_0)} \exp(-i\tau), \quad (252)$$

где

$$D_2(\tilde{\omega}, \mu_0) = \tilde{\omega}_2^2(1 + \mu_0) - \tilde{\omega}^2 + 2i\tilde{\beta}_2\tilde{\omega}, \quad f = \frac{\Lambda}{2} \exp(i\Phi_0).$$

Подставляя решение (252) в первое уравнение системы (251) и отбросив при этом быстро осциллирующие члены, получим следующее уравнение:

$$\tilde{\omega}_1^2\mu_0 = -\frac{2ff^*}{|D_2(1, \mu_0)|^2}$$

или

$$\tilde{\omega}_1^2\mu_0 \left((\tilde{\omega}_2^2(1 + \mu_0) - 1)^2 + 4\tilde{\beta}_2^2 \right) + 2ff^* = 0. \quad (253)$$

Сделаем замену $\mu \rightarrow \mu_0 + \mu$ и перепишем систему ((251)):

$$\begin{cases} \mu_{\tau\tau} + 2\tilde{\beta}_1\mu_\tau + \tilde{\omega}_1^2\mu + \tilde{\omega}_1^2\mu_0 = -\rho^2 \\ \rho_{\tau\tau} + 2\tilde{\beta}_2\rho_\tau + \left(\tilde{\omega}_2\sqrt{1 + \mu_0} \right)^2 \rho + \tilde{\omega}_2^2\rho\mu = f \exp(i\tau) + f^* \exp(-i\tau). \end{cases} \quad (254)$$

Таким образом, далее везде величина μ будет обозначать отклонение от равновесия μ_0 .

Нормальные координаты, соответственно, для первого и второго уравнения си-

стемы вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} b &= \mu_\tau + \lambda_1 \mu & b^* &= \mu_\tau + \lambda_1^* \mu \\ a &= \rho_\tau + \lambda_2 \rho & a^* &= \rho_\tau + \lambda_2^* \rho, \end{aligned} \quad (255)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tilde{\beta}_1 + i\tilde{\omega}'_1, & \tilde{\omega}'_1 &= \sqrt{\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\beta}_1^2}; \\ \lambda_2 &= \tilde{\beta}_2 + i\tilde{\omega}'_2, & \tilde{\omega}'_2 &= \sqrt{\tilde{\omega}_2^2 (1 + \mu_0) - \tilde{\beta}_2^2}. \end{aligned}$$

Обычные координаты (μ, μ_τ) и (ρ, ρ_τ) выражаются через введённые нормальные координаты следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{b - b^*}{2i\tilde{\omega}'_1}, & \mu_\tau &= -\tilde{\beta}_1 \frac{b - b^*}{2i\tilde{\omega}'_1} + \frac{b + b^*}{2}; \\ \rho &= \frac{a - a^*}{2i\tilde{\omega}'_2}, & \rho_\tau &= -\tilde{\beta}_2 \frac{a - a^*}{2i\tilde{\omega}'_2} + \frac{a + a^*}{2}. \end{aligned} \quad (256)$$

Подставляя выражения (256) в систему (254) и отбрасывая слагаемые, соответствующие вращению комплексных векторов a и b в отрицательную сторону, получим:

$$\begin{cases} b_\tau + (\tilde{\beta}_1 - i\tilde{\omega}'_1) b + \tilde{\omega}_1^2 \mu_0 = -\frac{1}{2\tilde{\omega}_2^2} a^* a \\ a_\tau + (\tilde{\beta}_2 - i\tilde{\omega}'_2) a - \frac{\tilde{\omega}_2^2}{4\tilde{\omega}'_1 \tilde{\omega}'_2} (ab - ab^*) = f \exp(i\tau). \end{cases} \quad (257)$$

Распишем функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ в терминах гармоник с медленно меняющимися амплитудами:

$$\begin{aligned} b &= x_m(\tau) \exp(i\tilde{\omega}'_1 \tau), \\ a &= a_p(\tau) \exp(i\tau) + a_S(\tau) \exp\{i(1 - \tilde{\omega}'_1)\tau\} + a_{AS}(\tau) \exp\{i(1 + \tilde{\omega}'_1)\tau\}. \end{aligned} \quad (258)$$

Здесь, следуя работам [68, 75], предполагается, что, как и в оптике в аналогичных системах с интерферометром Фабри-Перо, в электрическом колебательном контуре под действием механического осциллятора возникают амплитудно-модулированные колебания с несущей частотой, равной частоте генератора и амплитудой a_p , и двумя боковыми частотами, сдвинутыми относительно несущей на частоту механического осциллятора. По терминологии, принятой в оптике, моду с разностной частотой и амплитудой a_S назовём Стоксовой, а моду с суммарной частотой и амплитудой a_{AS} - анти-Стоксовой.

Подставив выражения (258) в уравнения (257), выделив медленно меняющиеся множители перед осциллирующими функциями $\exp(i\omega_j \tau)$ и приравняв их к нулю,

получим систему уравнений для медленно меняющихся амплитуд:

$$\begin{cases} a_{p,\tau} = -\left(\tilde{\beta}_2 + i\Delta\tilde{\omega}\right) a_p + \frac{\tilde{\omega}_2^2}{4\tilde{\omega}'_1\tilde{\omega}'_2} (a_S x_m - a_{AS} x_m^*) + f \\ x_{m,\tau} = -\tilde{\beta}_1 x_m - \frac{1}{2\tilde{\omega}_2'^2} (a_p^* a_{AS} + a_p a_S^*) \\ a_{S,\tau}^* = -\left(\tilde{\beta}_2 - i(\Delta\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'_1)\right) a_S^* - \frac{\tilde{\omega}_2^2}{4\tilde{\omega}'_1\tilde{\omega}'_2} a_p^* x_m \\ a_{AS,\tau} = -\left(\tilde{\beta}_2 + i(\Delta\tilde{\omega} + \tilde{\omega}'_1)\right) a_{AS} + \frac{\tilde{\omega}_2^2}{4\tilde{\omega}'_1\tilde{\omega}'_2} a_p x_m. \end{cases} \quad (259)$$

где $\Delta\tilde{\omega} = 1 - \tilde{\omega}'_2$ — расстройка частоты генератора относительно резонансной частоты электрического контура. Это и есть искомая система уравнений в приближении теории связанных колебаний, учитывающая возбуждение в электрическом контуре трёх мод: основную, Стоксовую и анти-Стоксовую.

Из первого уравнения системы (259) видно, что, как и следовало ожидать, за время порядка $\tilde{\beta}_2^{-1}$ амплитуда вынужденных колебаний a_p выходит на стационар. Считая амплитуды x_m , a_S и a_{AS} малыми, можно определить стационарное значение a_p следующим образом:

$$a_p = \frac{f}{\tilde{\beta}_2 + i\Delta\tilde{\omega}}. \quad (260)$$

При постоянном a_p остальные уравнения системы (259) образуют систему трёх линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{bmatrix} x_m \\ a_S^* \\ a_{AS} \end{bmatrix}_\tau = \begin{pmatrix} -\tilde{\beta}_1 & -\frac{a_p}{2\tilde{\omega}_2'^2} & -\frac{a_p^*}{2\tilde{\omega}_2'^2} \\ -\frac{\tilde{\omega}_2^2 a_p^*}{4\tilde{\omega}'_1\tilde{\omega}'_2} & -\left(\tilde{\beta}_2 - i(\Delta\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'_1)\right) & 0 \\ +\frac{\tilde{\omega}_2^2 a_p}{4\tilde{\omega}'_1\tilde{\omega}'_2} & 0 & -\left(\tilde{\beta}_2 + i(\Delta\tilde{\omega} + \tilde{\omega}'_1)\right) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ a_S^* \\ a_{AS} \end{bmatrix}. \quad (261)$$

Представив решение системы уравнений (261) в виде:

$$\begin{bmatrix} x_m \\ a_S^* \\ a_{AS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m^{(0)} \\ a_S^{(0)*} \\ a_{AS}^{(0)} \end{bmatrix} \exp(\lambda\tau),$$

где λ — комплексная (в общем случае) величина, можно получить характеристическое уравнение этой системы относительно λ :

$$\begin{vmatrix} -\left(\tilde{\beta}_1 + \lambda\right) & -\frac{a_p}{2\tilde{\omega}_2'^2} & -\frac{a_p^*}{2\tilde{\omega}_2'^2} \\ -\frac{\tilde{\omega}_2^2 a_p^*}{4\tilde{\omega}'_1\tilde{\omega}'_2} & -\left(\tilde{\beta}_2 + \lambda - i(\Delta\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'_1)\right) & 0 \\ +\frac{\tilde{\omega}_2^2 a_p}{4\tilde{\omega}'_1\tilde{\omega}'_2} & 0 & -\left(\tilde{\beta}_2 + \lambda + i(\Delta\tilde{\omega} + \tilde{\omega}'_1)\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (262)$$

или

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + \lambda^2 \left(\tilde{\beta}_1 + 2\tilde{\beta}_2 + i\tilde{\omega}'_1 \right) + \lambda \left(\tilde{\beta}_2^2 + \Delta\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}'_1{}^2 + 2\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 + 2i \left(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 \right) \tilde{\omega}'_1 \right) + \\ & + \tilde{\beta}_1 \left(\tilde{\beta}_2^2 + \Delta\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}'_1{}^2 \right) + 2i \left(\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2\tilde{\omega}'_1 - \Delta\tilde{\omega} \frac{\tilde{\omega}'_2{}^2 a_p^* a_p}{8\tilde{\omega}'_1\tilde{\omega}'_2{}^3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (263)$$

Уравнение (263) представляет собой дисперсионное соотношение, из которого определяются пороги и инкременты возможных неустойчивостей.

Пороговое значение безразмерной амплитуды внешнего сигнала $|f_{\text{th}}|$ соответствует наличию в уравнении (263) корня λ с нулевой действительной частью, что эквивалентно требованию:

$$\lambda = i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Подставив это выражение в (263) и рассматривая по отдельности действительную и мнимую части полученного комплексного выражения, получим:

$$|f_{\text{th}}|^2 = \left(\tilde{\beta}_2^2 + \Delta\tilde{\omega}^2 \right) \frac{8\tilde{\omega}'_1\tilde{\omega}'_2{}^3}{\tilde{\omega}'_2{}^2\Delta\tilde{\omega}} \left(\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2\tilde{\omega}'_1 + \frac{1}{2} \left(\xi \left(\tilde{\beta}_2^2 + \Delta\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}'_1{}^2 + 2\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \right) - \xi^2\tilde{\omega}'_1 - \xi^3 \right) \right), \quad (264)$$

где

$$\xi = \frac{- \left(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 \right) \pm \sqrt{\tilde{\beta}_1^2\Delta\tilde{\omega}^2 + \tilde{\beta}_2^2\tilde{\omega}'_1{}^2 + \tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \left(\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 + 2\tilde{\beta}_2^2 + 2\Delta\tilde{\omega}^2 \right)}}{\tilde{\beta}_1 + 2\tilde{\beta}_2}. \quad (265)$$

Выпишем вместе все уравнения, совместное решение которых дает пороговое значение $|f_{\text{th}}|^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} |f_{\text{th}}|^2 = \left(\tilde{\beta}_2^2 + \Delta\tilde{\omega}^2 \right) \frac{8\tilde{\omega}'_1\tilde{\omega}'_2{}^3}{\tilde{\omega}'_2{}^2\Delta\tilde{\omega}} \left(\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2\tilde{\omega}'_1 + \frac{1}{2} \left(\xi \left(\tilde{\beta}_2^2 + \Delta\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}'_1{}^2 + 2\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \right) - \xi^2\tilde{\omega}'_1 - \xi^3 \right) \right) \\ \tilde{\omega}'_1\mu_0 \left((\tilde{\omega}'_2(1 + \mu_0) - 1)^2 + 4\tilde{\beta}_2^2 \right) + 2|f_{\text{th}}|^2 = 0 \\ \tilde{\omega}'_1 = \sqrt{\tilde{\omega}'_1{}^2 - \tilde{\beta}_1^2} \\ \tilde{\omega}'_2 = \sqrt{\tilde{\omega}'_2{}^2(1 + \mu_0) - \tilde{\beta}_2^2} \\ \Delta\tilde{\omega} = 1 - \tilde{\omega}'_2 \\ \xi = \frac{- \left(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_2 \right) \pm \sqrt{\tilde{\beta}_1^2\Delta\tilde{\omega}^2 + \tilde{\beta}_2^2\tilde{\omega}'_1{}^2 + \tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 \left(\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2 + 2\tilde{\beta}_2^2 + 2\Delta\tilde{\omega}^2 \right)}}{\tilde{\beta}_1 + 2\tilde{\beta}_2}. \end{array} \right. \quad (266)$$

Правильность проделанных выкладок можно проверить непосредственно найдя решение системы уравнений (251) численными методами и построив фазовый портрет колебаний механического резонатора при рассчитанном пороговом значении Λ_{th} .

Действительно, такие портреты были показаны на рисунке 7, из которых видно, что при точно найденном Λ_{th} с помощью представленного расчета, механические колебания происходят по гармоническому закону и с фиксированной амплитудой. При $\Lambda < \Lambda_{th}$ фазовый портрет имеет вид спирали, стягивающейся в точку положения равновесия, а при $\Lambda > \Lambda_{th}$ амплитуда колебаний нарастает, до тех пор, пока они не выйдут на некоторый предельный цикл.

А.2 Плазменные волны в двумерном электронном газе, окруженном слоями из диэлектрических и металлических материалов

Рассмотрим двумерный электронный газ в некоторой гетероструктуре, например, в GaAs/AlGaAs. Пусть толщины слоев GaAs и AlGaAs равны соответственно h_1 и h_2 , а их диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 соответственно. Также, пусть слой GaAs граничит с другим диэлектриком с проницаемостью ε_3 , а AlGaAs — с диэлектриком с проницаемостью ε_4 . Ось координат OX направим вдоль выбранного направления распространения плазмонов, ось OZ — по нормали к слоям. В таких обозначениях плазмон в данной системе представляет собой комбинацию из 6 волн вида

$$\mathbf{E}^{(l)} = \mathbf{E}_0^{(l)} \exp(i\omega t - i\mathbf{k}^{(l)} \mathbf{r}), \quad (267)$$

по одной затухающей вглубь бесконечного полупространства в областях, занятых диэлектриками ε_3 и ε_4 , и еще две пары волн в областях, занятых диэлектриками ε_1 и ε_2 , где в каждой паре z -компоненты векторов $\mathbf{k}^{(l\pm)}$ имеют противоположные значения. Также, из уравнения Максвелла $\operatorname{div} D = 0$, для каждой из бегущих волн (267) справедливо соотношение:

$$\mathbf{E}_0^{(l)} \mathbf{k}^{(l)} = 0. \quad (268)$$

Для удовлетворения граничным условиям все x -компоненты векторов $\mathbf{k}^{(l)}$ должны быть равны одному значению, которое обозначим через q . Для остальных, z -компонент, выберем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(1\pm)} &= \left(q, \quad 0, \quad \mp i\kappa_1 \right), \\ \mathbf{k}^{(2\pm)} &= \left(q, \quad 0, \quad \pm i\kappa_2 \right), \\ \mathbf{k}^{(3)} &= \left(q, \quad 0, \quad -i\kappa_3 \right), \\ \mathbf{k}^{(4)} &= \left(q, \quad 0, \quad i\kappa_4 \right), \end{aligned} \quad (269)$$

где

$$\kappa_l = \sqrt{q^2 - \varepsilon_l \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \operatorname{Re} \kappa_l \geq 0. \quad (270)$$

Таким образом, в соответствующих областях электрическое поле выражается следующим образом:

$$\mathbf{E}^{(1)} = e^{i\omega t - iqx} \left(E_x^{(1+)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ q/i\kappa_1 \end{bmatrix} e^{-\kappa_1 z} + E_x^{(1-)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -q/i\kappa_1 \end{bmatrix} e^{\kappa_1(z-h_1)} \right), \quad (271)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = e^{i\omega t - iqx} \left(E_x^{(2+)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -q/i\kappa_2 \end{bmatrix} e^{\kappa_2 z} + E_x^{(2-)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ q/i\kappa_2 \end{bmatrix} e^{-\kappa_2(z+h_2)} \right), \quad (272)$$

$$\mathbf{E}^{(3)} = e^{i\omega t - iqx} \times E_x^{(3)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ q/i\kappa_3 \end{bmatrix} e^{-\kappa_3(z-h_1)}, \quad \mathbf{E}^{(4)} = e^{i\omega t - iqx} \times E_x^{(4)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -q/i\kappa_4 \end{bmatrix} e^{\kappa_4(z-h_2)}. \quad (273)$$

Условие равенства тангенциальных составляющих вектора \mathbf{E} на границах слоев выражается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} E_x^{(1+)} + e^{-\kappa_1 h_1} E_x^{(1-)} &= E_x^{(2+)} + e^{-\kappa_2 h_2} E_x^{(2-)} = E_{x0}, \\ E_x^{(1+)} e^{-\kappa_1 h_1} + E_x^{(1-)} &= E_x^{(3)}, \quad E_x^{(2+)} e^{-\kappa_2 h_2} + E_x^{(2-)} = E_x^{(4)}. \end{aligned} \quad (274)$$

Аналогичным образом выпишем еще 4 уравнения, выражающих непрерывность нормальных компонент вектора \mathbf{D} на границах слоев, на которых отсутствуют свободные заряды:

$$\begin{aligned} \frac{q}{i\kappa_1} E_x^{(1+)} - \frac{q}{i\kappa_1} e^{-\kappa_1 h_1} E_x^{(1-)} &= E_{z0}^{(1)}, \quad -\frac{q}{i\kappa_2} E_x^{(2+)} + \frac{q}{i\kappa_2} e^{-\kappa_2 h_2} E_x^{(2-)} = E_{z0}^{(2)}, \\ \frac{\varepsilon_1 q}{i\kappa_1} E_x^{(1+)} e^{-\kappa_1 h_1} - \frac{\varepsilon_1 q}{i\kappa_1} E_x^{(1-)} &= \frac{\varepsilon_3 q}{i\kappa_3} E_x^{(3)}, \quad -\frac{\varepsilon_2 q}{i\kappa_2} E_x^{(2+)} e^{-\kappa_2 h_2} + \frac{\varepsilon_2 q}{i\kappa_2} E_x^{(2-)} = -\frac{\varepsilon_4 q}{i\kappa_4} E_x^{(4)}. \end{aligned} \quad (275)$$

Чтобы решить систему из этих 8 уравнений, удобно сгруппировать их парами следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-\kappa_1 h_1} \\ e^{-\kappa_1 h_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{(1+)} \\ E_x^{(1-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x0} \\ E_x^{(3)} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{q}{i\kappa_1} & -\frac{q}{i\kappa_1} e^{-\kappa_1 h_1} \\ \frac{q}{i\kappa_1} e^{-\kappa_1 h_1} & -\frac{q}{i\kappa_1} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{(1+)} \\ \varepsilon_1 E_x^{(1-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{z0}^{(1)} \\ \frac{\varepsilon_3 q}{i\kappa_3} E_x^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (276)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-\kappa_2 h_2} \\ e^{-\kappa_2 h_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{(2+)} \\ E_x^{(2-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{x0} \\ E_x^{(4)} \end{bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{q}{i\kappa_2} & \frac{q}{i\kappa_2} e^{-\kappa_2 h_2} \\ -\frac{q}{i\kappa_2} e^{-\kappa_2 h_2} & \frac{q}{i\kappa_2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{(2+)} \\ \varepsilon_2 E_x^{(2-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{z0}^{(2)} \\ -\frac{\varepsilon_4 q}{i\kappa_4} E_x^{(4)} \end{bmatrix}. \quad (277)$$

Далее, простым преобразованием легко избавиться от неизвестных $E_x^{(1,2\pm)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -e^{-\kappa_1 h_1} \\ -e^{-\kappa_1 h_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_{x0} \\ E_x^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -e^{-\kappa_1 h_1} \\ e^{-\kappa_1 h_1} & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i\kappa_1}{q} E_{z0}^{(1)} \\ \frac{\varepsilon_3 \kappa_1}{\varepsilon_1 \kappa_3} E_x^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (278)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -e^{-\kappa_2 h_2} \\ -e^{-\kappa_2 h_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_{x0} \\ E_x^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & e^{-\kappa_2 h_2} \\ -e^{-\kappa_2 h_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i\kappa_2}{q} E_{z0}^{(2)} \\ -\frac{\varepsilon_4 \kappa_2}{\varepsilon_2 \kappa_4} E_x^{(4)} \end{bmatrix}. \quad (279)$$

Выполнив преобразования, получаем из этих уравнений соотношения между $E_{z0}^{(1)}$, $E_{z0}^{(2)}$ и E_{x0} :

$$E_{z0}^{(1)} = \frac{q}{i\kappa_1} E_{x0} \frac{\frac{\varepsilon_1 \kappa_3}{\varepsilon_3 \kappa_1} \operatorname{th} \kappa_1 h_1 + 1}{\frac{\varepsilon_1 \kappa_3}{\varepsilon_3 \kappa_1} + \operatorname{th} \kappa_1 h_1}, \quad E_{z0}^{(2)} = -\frac{q}{i\kappa_2} E_{x0} \frac{\frac{\varepsilon_2 \kappa_4}{\varepsilon_4 \kappa_2} \operatorname{th} \kappa_2 h_2 + 1}{\frac{\varepsilon_2 \kappa_4}{\varepsilon_4 \kappa_2} + \operatorname{th} \kappa_2 h_2}. \quad (280)$$

Динамику двумерного электронного газа на границе раздела GaAs/AlGaAs можно описать в гидродинамическом приближении:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(-en_S + \sigma) v] = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \gamma v + v \frac{\partial x}{\partial x} = -\frac{e}{m^*} E_x \end{cases} \quad (281)$$

Ища неизвестные функции $\sigma(x, t)$ и $v(x, t)$ в виде бегущих волн

$$\sigma(x, t) = \sigma_0 \frac{e^{i\omega t - iqx}}{2} + \sigma_0^* \frac{e^{-i\omega t + iqx}}{2}, \quad v(x, t) = v_0 \frac{e^{i\omega t - iqx}}{2} + v_0^* \frac{e^{-i\omega t + iqx}}{2}, \quad (282)$$

и линеаризуя данную систему уравнений, получим следующие соотношения для комплексных амплитуд волн σ_0 и v_0 :

$$\begin{cases} i\omega \sigma_0 + iq \cdot en_S v_0 = 0 \\ (i\omega + \gamma) v_0 = -\frac{e}{m^*} E_{x0} \end{cases} \quad (283)$$

Далее, в соответствии с уравнением Максвелла $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$, можем получить связь между амплитудой σ_0 компонентами электрического поля $E_{z0}^{(1)}$ и $E_{z0}^{(2)}$:

$$\varepsilon_1 E_{z0}^{(1)} - \varepsilon_2 E_{z0}^{(2)} = 4\pi\sigma_0, \quad (284)$$

используя которую совместно с системой (283) и выражениями (280), получим дис-

персионное уравнение для волн электронной плотности в двумерном электронном газе:

$$\omega(\omega - i\gamma) \left[\frac{\frac{\varepsilon_3}{\kappa_3} + \frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} \operatorname{th} \kappa_1 h_1}{\frac{\varepsilon_3 \kappa_1}{\varepsilon_1 \kappa_3} \operatorname{th} \kappa_1 h_1 + 1} + \frac{\frac{\varepsilon_4}{\kappa_4} + \frac{\varepsilon_2}{\kappa_2} \operatorname{th} \kappa_2 h_2}{\frac{\varepsilon_4 \kappa_2}{\varepsilon_2 \kappa_4} \operatorname{th} \kappa_2 h_2 + 1} \right] = \frac{4\pi e^2 n_S}{m^*}. \quad (285)$$

А.3 Плазменные волны в одностенных углеродных нанотрубках с металлической проводимостью

Для нахождения спектра плазмонов в одностенной углеродной нанотрубке необходимо решить совместно следующие уравнения:

1) Уравнения, определяющие электронный транспорт в нанотрубке

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial j}{\partial t} + \gamma j + v_F^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{2e^2 v_F}{\pi^2 \hbar a} E_z, \end{cases} \quad (286)$$

где z — направление вдоль оси нанотрубки, σ — поверхностная плотность заряда в ней, j — поверхностный ток, a — радиус нанотрубки, E_z — проекция вектора напряженности электрического поля на ось Z . В данных уравнениях предполагается аксиально симметричное распределение заряда и тока по поверхности нанотрубки, т.к. в случае рассматриваемых устройств только такие плазмоны будут возбуждаться в нанотрубках.

2) Уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (287)$$

3) Граничные условия на поверхности нанотрубки:

$$\begin{aligned} E_n^{\text{ext}} - E_n^{\text{int}} \Big|_{r=a} &= 4\pi\sigma(t, z, \varphi), \\ E_\tau^{\text{ext}} - E_\tau^{\text{int}} \Big|_{r=a} &= 0, \\ H_\tau^{\text{ext}} - H_\tau^{\text{int}} \Big|_{r=a} &= -\frac{4\pi}{c} j(t, z, \varphi), \\ H_n^{\text{ext}} - H_n^{\text{int}} \Big|_{r=a} &= 0, \end{aligned} \quad (288)$$

здесь введена цилиндрическая система координат (z, r, φ) с осью z , совпадающей с

осью нанотрубки; индексы “int” и “ext” обозначают поля \mathbf{E} и \mathbf{H} внутри и снаружи трубки соответственно, индексы “ n ” и “ τ ”, соответственно, обозначают нормальные и тангенциальные проекции векторов относительно поверхности нанотрубки, $\sigma(t, z, \varphi)$ — пространственно-временное распределение поверхностного заряда нанотрубки, n_S — поверхностная концентрация свободных электронов в нанотрубке, $u(t, z, \varphi)$ — усредненная (гидродинамическая) скорость электронов, a — радиус нанотрубки.

Преобразуем уравнения Максвелла (287) в форму волнового уравнения:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \end{cases} \quad (289)$$

Решение при этом будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma(t, z, \varphi) &= \sigma_\omega e^{in\varphi} e^{i\omega t - ikz}, \\ j(t, z, \varphi) &= j_\omega e^{in\varphi} e^{i\omega t - ikz}. \end{aligned} \quad (290)$$

Соответственно, предположим, что по переменным t , z и φ зависимости $\mathbf{E}^{\text{int}}(t, z, r, \varphi)$ и $\mathbf{E}^{\text{ext}}(t, z, r, \varphi)$ должны иметь такой же вид:

$$\mathbf{E}^{\text{int,ext}} = \mathbf{E}^{\text{int,ext}}(r) e^{in\varphi} e^{i\omega t - ikz}. \quad (291)$$

Далее, пока не потребуется различать поля внутри и вне нанотрубки, будем опускать пометки “int” и “ext”. Подставив выражения (291) в уравнения (289), используя выражение для оператора Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}, \quad (292)$$

и получим уравнение, определяющее радиальную зависимость поля \mathbf{E} :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad (293)$$

из которого, сделав следующую замену переменных:

$$\rho = qr, \quad q = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad (294)$$

получим для \mathbf{E} модифицированное уравнение Бесселя:

$$\rho^2 \mathbf{E}_{\rho\rho} + \rho \mathbf{E}_\rho - (\rho^2 + n^2) \mathbf{E} = 0, \quad (295)$$

где подразумевается, что вектор $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z$, т.е. записан в Декартовых координатах, если же волновое уравнение в системе (289) переписать для вектора \mathbf{E} в цилиндрических координатах, т.е. $\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_\varphi \mathbf{e}_\varphi + E_z \mathbf{e}_z$, то это уравнение распадается на следующую систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2} E_r = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2} E_\varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (296)$$

Подставив в которую выражения (291), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 E_{r,rr} + r E_{r,r} - (n^2 + 1 + q^2 r^2) E_r - 2in E_\varphi = 0 \\ r^2 E_{\varphi,rr} + r E_{\varphi,r} - (n^2 + 1 + q^2 r^2) E_\varphi + 2in E_r = 0. \\ r^2 E_{z,rr} + r E_{z,r} - (n^2 + q^2 r^2) E_z = 0. \end{array} \right. \quad (297)$$

Поскольку в работе рассматриваются только аксиально симметричные волны, в данных уравнениях можем положить $n = 0$, в результате система распадается на два независимых уравнения для нахождения поля \mathbf{E} в каждой из заданных областей:

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 E_{r,rr} + r E_{r,r} - (1 + q^2 r^2) E_r = 0 \\ r^2 E_{z,rr} + r E_{z,r} - (0 + q^2 r^2) E_z = 0. \end{array} \right. \quad (298)$$

Решения уравнений (298) для полей \mathbf{E}^{int} и \mathbf{E}^{ext} соответственно будут:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{int}}(r) &= E_r^{(i)} I_1(qr) \mathbf{e}_r + E_z^{(i)} I_0(qr) \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{E}^{\text{ext}}(r) &= E_r^{(e)} K_1(qr) \mathbf{e}_r + E_z^{(e)} K_0(qr) \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (299)$$

где $I_\nu(\rho)$ и $K_\nu(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя порядка ν первого и второго рода соответственно; $E_{r,z}^{(i,e)}$ — неопределенные коэффициенты, для нахождения соотношения между которыми мы используем второе уравнение системы (289), которое в цилиндрических координатах записывается следующим образом:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (300)$$

Далее, используя следующие формулы:

$$I_1'(\rho) = I_0(\rho) - \frac{I_1(\rho)}{\rho}, \quad K_1'(\rho) = -K_0(\rho) - \frac{K_1(\rho)}{\rho}, \quad (301)$$

найдем связь между неопределенными множителями в решениях (299):

$$\mathbf{E}_r^{(i)} q - \mathbf{E}_z^{(i)} \cdot ik = 0, \quad -\mathbf{E}_r^{(e)} q - \mathbf{E}_z^{(e)} \cdot ik = 0. \quad (302)$$

Перепишем с учетом последнего решения (299):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{int}}(r) &= \mathbf{E}_z^{(i)} \left(\frac{ik}{q} I_1(qr) \mathbf{e}_r + I_0(qr) \mathbf{e}_z \right), \\ \mathbf{E}^{\text{ext}}(r) &= \mathbf{E}_z^{(e)} \left(-\frac{ik}{q} K_1(qr) \mathbf{e}_r + K_0(qr) \mathbf{e}_z \right). \end{aligned} \quad (303)$$

Далее, введем общую для внешнего и внутреннего поля величину E_0 , характеризующую амплитуду поверхностной волны используя второе уравнение в группе соотношений (288); так, через E_0 выразятся $\mathbf{E}_z^{(i)}$ и $\mathbf{E}_z^{(e)}$ следующим образом:

$$\mathbf{E}_z^{(i)} = E_0 K_0(qa), \quad \mathbf{E}_z^{(e)} = E_0 I_0(qa). \quad (304)$$

Теперь подставим в уравнения движения электронов в нанотрубке (286) выражение для продольной компоненты вектора электрического поля E_z выражение $E_0 I_0(qa) K_0(qa)$, а также выражения (290), в результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} i\omega\sigma_\omega - ik \cdot j_\omega = 0 \\ j_\omega (i\omega + \gamma) = ik \cdot v_F^2 \rho_\omega + \frac{2e^2 v_F}{\pi^2 \hbar a} E_0 I_0(qa) K_0(qa) \end{cases}, \quad (305)$$

откуда легко можно получить выражение для σ_0 :

$$\sigma_0 = -ik \frac{2e^2 v_F}{\pi^2 \hbar a} \frac{E_0 I_0(qa) K_0(qa)}{\omega(\omega - i\gamma) - k^2 v_F^2}. \quad (306)$$

Далее, используя выражения (304), преобразуем граничное условие для нормальной компоненты вектора \mathbf{E} :

$$-\frac{ik}{q} E_0 (I_0(qa) K_1(qa) + K_0(qa) I_1(qa)) = 4\pi\sigma_\omega. \quad (307)$$

Из двух последних соотношений получаем:

$$\omega(\omega - i\gamma) = k^2 v_F^2 + \omega_p^2 \cdot (qa) \cdot \Gamma(qa), \quad (308)$$

где ω_p — характерная “плазменная” частота нанотрубки, определяемая соотношением:

$$\omega_p^2 = \frac{8e^2 v_F}{\pi a^2 \hbar}, \quad (309)$$

$\Gamma(qa)$ мы обозначили следующее выражение:

$$\Gamma(qa) = \left[\frac{I_1(qa)}{I_0(qa)} + \frac{K_1(qa)}{K_0(qa)} \right]^{-1}. \quad (310)$$

Поскольку плазменные волны в нанотрубках сильно замедлены (их фазовая скорость в сотни раз меньше скорости света), $k \ll \omega/c$, следовательно, можно считать, что $q \approx k$, что сильно упрощает решение дисперсионного уравнения (308).

А.4 Расчет колебаний электронной плазмы в полевом транзисторе с цилиндрическим затвором

Линеаризованные уравнения, описывающие колебания электронной плотности в 2d-ЭГ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (-en_S + \sigma_{\text{ind}}(x)) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u + \frac{e}{m_e} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\sigma(\xi, t)}{x - \xi} d\xi = -\frac{e}{m_e} \frac{2\rho_l^{\text{var}}(t)x}{z_0^2 + x^2}. \end{cases} \quad (311)$$

Зависимость $\sigma_{\text{ind}}(x)$ определяется величиной постоянного напряжения, приложенного между затвором и концами канала транзистора (исток и сток):

$$\sigma_{\text{ind}}(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{c_l V_0 z_0}{x^2 + z_0^2}, \quad a \ll z_0, \quad z_0 \ll L. \quad (312)$$

В целях упрощения выкладок здесь мы будем рассматривать случай, когда $V_0 = 0$. При $V \neq 0$ задача решается аналогично тому, как будет представлено ниже, однако размерность матричных уравнений при этом увеличивается в два раза, а такое детальное исследование системы выходит за рамки вопросов, обсуждаемых в диссертации.

Также, для получения решения к уравнениям (311) необходимо добавить соотношение, выражающее закон сохранения заряда:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \sigma(x, t) dx + \rho_l^{\text{var}}(t) = 0, \quad (313)$$

а также, условие, накладываемое на электростатический потенциал:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{E} d\bar{r} = \delta\varphi(t), \quad (314)$$

где \bar{r}_1 — радиус-вектор точки на поверхности затвора, \bar{r}_2 — точки на любом из краев слоя 2d-ЭГ, φ_1 и φ_2 — значения электрического потенциала в этих точках соответственно, \bar{E} — вектор напряженности электрического поля в системе, сигнал переменного напряжения $\delta\varphi(t)$ будем считать гармоническим:

$$\delta\varphi(t) = \text{Re}(\delta\varphi_\omega e^{i\omega t}). \quad (315)$$

Решение интегрального уравнения

При таких условиях неизвестную функцию от времени линейной плотности заряда на затворе также надо искать в гармоническом виде:

$$\rho_l^{\text{var}}(t) = \text{Re}(\rho_{l,\omega} e^{i\omega t}), \quad (316)$$

а функции $\sigma(x, t)$ и $u(x, t)$, фигурирующие в системе (311) в виде стоячих волн:

$$\sigma(x, t) = \text{Re}[\sigma_\omega(x) e^{i\omega t}], \quad u(x, t) = \text{Re}[u_\omega(x) e^{i\omega t}] \quad (317)$$

где $\sigma_\omega(x)$ и $u_\omega(x)$ — комплексные функции от одного аргумента x .

С учётом вышесказанного, систему (311) преобразуется к следующему виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\omega(x) = \frac{ens}{i\omega} \frac{\partial}{\partial x} u_\omega(x) \\ (i\omega + \gamma) u_\omega(x) + \frac{e}{m^*} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{2\sigma_\omega(\xi)}{x-\xi} d\xi = -\frac{e}{m^*} \frac{2\rho_{l,\omega} x}{z_0^2 + x^2}. \end{array} \right. \quad (318)$$

Учитывая симметрию задачи относительно плоскости $x = 0$, решение этой системы будем искать в виде следующих рядов Фурье:

$$\begin{aligned} \sigma_\omega(x) &= \sigma_{\omega,0} + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{\omega,j} \cos(jk_0 x), \\ u_\omega(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} u_{\omega,j} \sin(jk_0 x), \\ k_0 &= \frac{2\pi}{L}. \end{aligned} \quad (319)$$

Коэффициенты $u_{\omega,j}$ и $\sigma_{\omega,j}$ определяются по формулам, известным из теории рядов Фурье:

$$u_{\omega,j} = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} u_\omega(x) \sin(jk_0 x) dx, \quad j = \overline{1.. \infty}, \quad (320)$$

$$\sigma_{\omega,j} = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\omega}(x) \cos(jk_0x) dx, \quad j = \overline{1.. \infty}, \quad (321)$$

$$\sigma_{\omega,0} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \sigma_{\omega}(x) dx. \quad (322)$$

Используя соотношение (313), выражающее закон сохранения заряда можно сразу получить:

$$\sigma_{\omega,0} = -\frac{\rho_{l,\omega}}{L}. \quad (323)$$

Далее, из первого уравнения системы (318) и формул (321-322), получим соотношение между $\sigma_{\omega,j}$ и $u_{\omega,j}$:

$$\sigma_{\omega,j} = \frac{en_S}{i\omega} \left(\frac{2}{L} \left[u_{\omega} \left(\frac{L}{2} \right) - u_{\omega} \left(-\frac{L}{2} \right) \right] (-1)^j + \frac{2\pi j}{L} u_{\omega,j} \right), \quad (324)$$

$$\sigma_{\omega,0} = \frac{en_S}{i\omega} \frac{1}{L} \left[u_{\omega} \left(\frac{L}{2} \right) - u_{\omega} \left(-\frac{L}{2} \right) \right].$$

Сопоставляя последнее выражение с соотношением (323), получаем:

$$u_{\omega} \left(\frac{L}{2} \right) - u_{\omega} \left(-\frac{L}{2} \right) = -\frac{i\omega}{en_S} \rho_{l,\omega}, \quad (325)$$

что позволяет исключить величины $u(\pm L/2)$ из выражения (324):

$$\sigma_{\omega,j} = (-1)^{j+1} \frac{2\rho_{l,\omega}}{L} + \frac{en_S}{i\omega} \frac{2\pi j}{L} u_{\omega,j}. \quad (326)$$

Подставив выражение для $\sigma_{\omega}(x)$ из (319) во второе уравнение системы (318), а также используя соотношения (326) и (323), получим:

$$\begin{aligned} (i\omega + \gamma) u_{\omega}(x) + \frac{4\pi e^2 n_S}{i\omega \cdot m^* L} \sum_{j=1}^{\infty} \left[u_{\omega,j} \cdot j \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(j\zeta)}{k_0x - \zeta} d\zeta \right] = \\ = -\frac{e}{m_e} \left(\frac{2\rho_{l,\omega}x}{z_0^2 + x^2} - \frac{2q_l}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d\xi}{x - \xi} + \frac{4\rho_{l,\omega}}{L} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(j\zeta)}{k_0x - \zeta} d\zeta \right), \end{aligned} \quad (327)$$

Выпишем Фурье-разложения функций в правой части уравнения (327):

$$\frac{x}{x^2 + z_0^2} = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{\infty} B_j(\delta) \sin(jk_0x), \quad B_j(\delta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\zeta \sin(j\zeta)}{\zeta^2 + \delta^2} d\zeta, \quad \delta = \frac{2\pi z_0}{L}, \quad (328)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{d\xi}{x - \xi} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} N_j \sin(jk_0x),$$

$$N_j = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\sin(jk_0x) dy dx}{x - y} = \frac{(-1)^j}{\pi j} (\text{Ci}(2\pi j) - \ln(2\pi j) - C), \quad (329)$$

где $\text{Ci}(x)$ и C — косинусоидальный интеграл и константа Эйлера соответственно (см. выражения (339)). Также понадобится разложение

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(j\zeta)}{k_0x - \zeta} d\zeta = \sum_{l=1}^{\infty} R_{jl} \sin(lk_0x), \quad j, l \in \overline{1 \dots \infty} \quad (330)$$

где

$$R_{jl} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(j\zeta) \sin(l\eta)}{\eta - \zeta} d\zeta d\eta \quad (331)$$

или

$$R_{jl} = \begin{cases} 2 \cdot \text{Si}(2\pi j), & j = l \\ \frac{(-1)^{l+j}}{\pi} \frac{2l}{l^2 - j^2} \left[\ln \frac{j}{l} + \text{Ci}(2\pi l) - \text{Ci}(2\pi j) \right], & j \neq l. \end{cases} \quad (332)$$

Подставив выражение для $u_{\omega}(x)$ из (319) в уравнение (327), а также имея ввиду разложения (328-332), получим:

$$\omega(\omega - i\gamma) \sum_{j=1}^{\infty} u_{\omega,j} \sin(jk_0x) - \frac{4\pi e^2 n_S}{m^* L} \sum_{j=1}^{\infty} \left[u_{\omega,j} \cdot j \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(j\zeta)}{k_0x - \zeta} d\zeta \right] =$$

$$= i\omega \frac{4e}{m^* L} \rho_{l,\omega} \sum_{j=1}^{\infty} \left(B_j(\delta) - N_j + [R^T I']_j \right) \sin(jk_0x), \quad (333)$$

где компоненты матрицы R выражаются как

$$[R]_{jl} = R_{jl}, \quad j, l \in \overline{1 \dots \infty}; \quad (334)$$

и компоненты вектора I' как

$$[I']_j = (-1)^{j+1}, \quad j \in \overline{1 \dots \infty}. \quad (335)$$

Представляя полученный интеграл в уравнении (333) в виде суммы синусоидальных гармоник, получим:

$$j \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(j\zeta)}{k_0 x - \zeta} d\zeta = \sum_{l=1}^{\infty} M_{jl} \sin(lk_0 x), \quad (336)$$

где

$$M_{jl} = \frac{j}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(j\zeta) \sin(l\eta)}{\eta - \zeta} d\zeta d\eta \quad (337)$$

или

$$M_{jl} = \begin{cases} 2j \cdot \text{Si}(2\pi j), & j = l \\ \frac{(-1)^{l+j}}{\pi} \frac{2jl}{l^2 - j^2} \left[\ln \frac{j}{l} + \text{Ci}(2\pi l) - \text{Ci}(2\pi j) \right], & j \neq l \end{cases}, \quad (338)$$

где $\text{Si}(x)$ и $\text{Ci}(x)$ — синусоидальный и косинусоидальный интегралы, которые выражаются следующим образом:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi, \quad \text{Ci}(x) = C + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos(\xi) - 1}{\xi} d\xi, \quad C \approx 0,57722. \quad (339)$$

Таким образом, соотношение (333) преобразуется в систему из счетного числа алгебраических уравнений:

$$\Lambda \cdot u_{\omega,l} - \sum_{j=1}^{\infty} M_{jl} u_{\omega,j} = i v_{\omega} (B_l(\delta) - N_l + [R^T I']_l), \quad (340)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{\pi \omega (\omega - i\gamma)}{2 \omega_0^2}, \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{2\pi^2 e^2 n_S}{m^* L}}, \\
v_\omega &= \frac{\omega \rho_{l,\omega}}{\pi e n_S}.
\end{aligned} \tag{341}$$

Уравнение (340) можно решить, ограничившись конечным числом гармоник. Так, мы получим выражение для неизвестных векторов $u_{\omega,j}$ и $\sigma_{\omega,j}$:

$$u_{\omega,j} = i v_\omega U_j, \tag{342}$$

$$U_j = \left[(\Lambda E - M^\top)^{-1} F \right]_j; \tag{343}$$

$$\sigma_{\omega,j} = \frac{2\rho_{l,\omega}}{L} S_j, \quad j \in \overline{1 \dots \infty}, \tag{344}$$

$$S_j = (-1)^{j+1} + j U_j. \tag{345}$$

где компоненты вектора F выражаются как

$$F_l = B_l(\delta) - N_l + [R^\top I]_l. \tag{346}$$

Полученные выражения для комплексных амплитуд $u_{\omega,j}$ и $\sigma_{\omega,j}$ полностью определяют профили стоячих колебаний скорости электронов $u(x,t)$ и их поверхностной плотности $\sigma(x,t)$.

Амплитудно-фазовое соотношение между $\delta\varphi(t)$ и $\rho_l^{\text{var}}(t)$

Прежде чем приступить к дальнейшему изложению, условимся в этом разделе понимать все величины, обозначающие электрические поля, потенциалы и заряды как комплексные амплитуды соответствующих гармонических зависимостей. Далее, используя известные значения амплитуд гармоник в разложениях (319), вычислим величину разности потенциалов между затвором и слоем 2d-ЭГ в точках $x = \pm L/2$. Искомая разность потенциалов может быть найдена как интеграл от вектора электрического поля вдоль кривой, соединяющей данные две точки (см. комментарии к формуле (314)):

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{E} d\bar{r}, \tag{347}$$

при этом поле $\bar{E}(x,z)$ разделим на составляющие:

$$\bar{E}(x, z) = \bar{E}_\rho(x, z) + \bar{E}_\sigma(x, z), \quad (348)$$

где $\bar{E}_\rho(x, z)$ – поле зарядов нанотрубки; $\bar{E}_\sigma(x, z)$ – поле зарядов слоя 2d-ЭГ.

По тому же принципу разделим разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ на составляющие:

$$\Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{12}^{(\rho)} + \Delta\varphi_{12}^{(\sigma)}, \quad (349)$$

где

$$\Delta\varphi_{12}^{(\rho)} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{E}_\rho d\bar{r}, \quad \Delta\varphi_{12}^{(\sigma)} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{E}_\sigma d\bar{r}. \quad (350)$$

Составляющая, обусловленная зарядами затвора находится элементарным образом:

$$\Delta\varphi_{12}^{(\rho)} = 2\rho_{l,\omega} \ln \left(\frac{\sqrt{z_0^2 + L^2/4}}{a} \right). \quad (351)$$

В выражении для $\Delta\varphi_{12}^{(\sigma)}$ путь интегрирования разделим на 2 участка: первый — от точки затвора до начала координат (точки 0 на рисунке 14) вдоль оси z , интеграл вдоль него обозначим $\Delta\varphi_{10}^{(\sigma)}$, и второй — от точки 0 вдоль оси x (то есть вдоль слоя 2d-ЭГ) до точки 2 одного из концов слоя, интеграл вдоль второго участка пути обозначим $\Delta\varphi_{02}^{(\sigma)}$.

Таким образом,

$$\Delta\varphi_{10}^{(\sigma)} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_0} \bar{E}_\sigma d\bar{r} = - \int_0^{z_0-a} E_\sigma^{(z)}(0, z) dz, \quad (352)$$

$$\Delta\varphi_{02}^{(\sigma)} = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_2} \bar{E}_\sigma d\bar{r} = \int_0^{\frac{L}{2}} E_\sigma^{(x)}(x, 0) dx. \quad (353)$$

При этом:

$$E_\sigma^{(z)}(0, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2z\sigma_\omega(\zeta)}{z^2 + \zeta^2} d\zeta, \quad (354)$$

$$E_\sigma^{(x)}(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sigma_\omega(\zeta)}{x - \zeta} d\zeta \quad (355)$$

Подставляя (354) в (352), получим:

$$\Delta\varphi_{10}^{(\sigma)} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \ln \left(1 + \frac{z_0'^2}{\zeta^2} \right) \sigma_\sigma(\zeta) d\zeta, \quad (356)$$

где введено обозначение: $z_0' = z_0 - a$.

Аналогично, для $\Delta\varphi_{02}^{(\sigma)}$:

$$\Delta\varphi_{02}^{(\sigma)} = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} 2 \ln \left| 1 - \frac{L}{2\zeta} \right| \sigma_\sigma(\zeta) d\zeta. \quad (357)$$

Сложив $\Delta\varphi_{10}^{(\sigma)}$ и $\Delta\varphi_{02}^{(\sigma)}$, получим:

$$\Delta\varphi_{12}^{(\sigma)} = -\frac{q_l}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{(\xi - \pi)^2}{\xi^2 + \delta'^2} d\xi + 2q_l \sum_{j=1}^{\infty} \frac{S_j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{(\xi - \pi)^2}{\xi^2 + \delta'^2} \cos(j\xi) d\xi, \quad (358)$$

$$\delta' = \delta - \alpha, \quad \alpha = \frac{2\pi a}{L}.$$

Сделаем обозначение:

$$\Phi_j = \frac{S_j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{(\xi - \pi)^2}{\xi^2 + \delta'^2} \cos(j\xi) d\xi, \quad j = \overline{1.. \infty} \quad (359)$$

$$\Phi_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{(\xi - \pi)^2}{\xi^2 + \delta'^2} d\xi. \quad (360)$$

Для коэффициентов Φ_j справедливы выражения:

$$\Phi_j = \frac{S_j}{\pi j} \left[(-1)^{j+1} \text{Si}(2\pi j) + B_j(\delta') \right], \quad j \in \overline{1.. \infty} \quad (361)$$

$$\Phi_0 = \ln \left[\frac{\sqrt{\pi^2 + \delta'^2}}{2\pi} \right] + \frac{\delta'}{\pi} \arctan \left(\frac{\pi}{\delta'} \right)$$

Таким образом, нами установлена связь между $\Delta\varphi_{12}$ и q_l :

$$\Delta\varphi_{12} = 2q_l \left[\ln \left(\frac{z_0}{a} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\delta^2}} \right) + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j \right]. \quad (362)$$

Приравнивая найденную по формуле (362) комплексную амплитуду величины

$\Delta\varphi_{12}$ комплексной амплитуде входящего сигнала напряжения $\delta\varphi_\omega$, заданного формулой (315), получим соотношение между $\delta\varphi_\omega$ и $\rho_{l,\omega}$:

$$\rho_{l,\omega} = C(\omega) \delta\varphi_\omega, \quad C(\omega) = 0.5 \left[\ln \left(\frac{z_0}{a} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\delta^2}} \right) + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j \right]^{-1}. \quad (363)$$

где $C(\omega)$ — имеет смысл комплексной погонной ёмкости системы затворный электрод – слой 2d-ЭГ на единицу длины в продольном направлении оси Y (см. рисунок 14).

А.5 Уравнение Поклингтона и его решение в случае ОСУНТ с металлической проводимостью

Основой для получения уравнения Поклингтона является определение векторного и скалярного потенциалов, \mathbf{A} и φ , на основе уравнений Максвелла и калибровочного соотношения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (364)$$

При такой калибровке уравнения для потенциалов имеют вид Даламбера:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = 4\pi \rho, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (365)$$

где ρ — объемная плотность заряда в пространстве, \mathbf{j} — плотность тока. Частным решением этих уравнений являются запаздывающие потенциалы

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (366)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $t' = t - R/c$ — время запаздывания. Из выражения для электрического поля через скалярный и векторный потенциалы

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (367)$$

используя калибровочное соотношение, можно выразить электрическое поле только через векторный потенциал:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (368)$$

В углеродной нанотрубке токи текут только вдоль одного направления оси Z , поэтому можно считать, что потенциал и электрическое поле вблизи поверхности нанотрубки также направлены вдоль этой оси. В результате предыдущее векторное уравнение можно переписать в скалярном виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \int \frac{j_z(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\partial E_z^{(i)}}{\partial t}, \quad (369)$$

где $E_z^{(i)}$ — составляющая поля, обусловленная зарядами нанотрубки.

Далее, представив электрическое поле в виде суммы внешнего поля волны $E_{z,\omega} \cos \omega t$ и собственного поля $E_z^{(i)}$, и используя связь в частотном пространстве между полным электрическим полем и током

$$I_\omega = \tilde{s}_{zz} (E_{z,\omega} + E_z^{(i)}), \quad \tilde{s}_{zz} = \frac{4e^2 v_F}{\pi \hbar} \times \frac{1}{i\omega + \gamma}, \quad (370)$$

интеграл в левой части уравнения (369) в частотном пространстве можно записать в следующем виде:

$$\left(\int \frac{j_z(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)_\omega = \int_{-L/2}^{L/2} I_\omega(z') \mathcal{K}(z - z') dz, \quad (371)$$

где $\mathcal{K}(z)$ — ядро уравнения Галлена, которое в точном виде вычисляется как

$$\mathcal{K}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(-ik\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi/2)}\right)}{\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi/2)}} d\phi \quad (372)$$

где $k = \omega/c$ — волновой вектор падающей электромагнитной волны. В случае очень тонких нанотрубок, для которых $a \ll L$, можно воспользоваться приближенным выражением для ядра интегрального уравнения:

$$\mathcal{K}(z) \approx \int_0^{2\pi} \frac{\exp(-ik\sqrt{z^2 + a^2})}{\sqrt{z^2 + a^2}} \quad (373)$$

Записанное приближенное выражение для ядра $\mathcal{K}(z)$ справедливо для достаточно тонких нанотрубок ($a \ll L$). Таким образом, в частотном пространстве будем иметь следующее уравнение, из которого можно будет определить распределение тока ль нанотрубки:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-L/2}^{L/2} I_\omega(z') \mathcal{K}(z - z') dz' = \frac{i\omega}{\tilde{s}_{zz}} I_\omega - i\omega E_{z,\omega}. \quad (374)$$

Воспользуемся следующим соотношением:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \frac{\sin k|z - z'|}{2k} = \delta(z - z'), \quad (375)$$

тогда получим уравнение для тока в более удобном виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \int_{-L/2}^{L/2} I_\omega(z') [\mathcal{K}(z - z') - \mathcal{Q}(z - z')] dz = -i\omega E_{z,\omega}, \quad \mathcal{Q}(z) = \frac{i\omega \sin k|z|}{\tilde{s}_{zz} 2k}. \quad (376)$$

Выписав общее решение данного уравнения относительно интеграла, получим уравнение Поклингтона:

$$\int_{-L/2}^{L/2} I_\omega(z') [\mathcal{K}(z - z') - \mathcal{Q}(z - z')] dz' = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - \frac{i\omega}{k^2} E_{z,\omega}, \quad (377)$$

где C_1 и C_2 — неизвестные константы, подлежащие определению. Далее для краткости обозначим

$$\mathcal{K}(z - z') - \mathcal{Q}(z - z') = D(z - z'), \quad (378)$$

причем известно, что функции $\mathcal{K}(z)$, $\mathcal{Q}(z)$ и $D(z)$ — четные, из чего следует, что в силу симметрии C_2 равно нулю.

Решать уравнение (377) удобно представив неизвестную функцию $I_\omega(z)$ в виде ряда Фурье с неизвестными коэффициентами:

$$I_\omega(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n \cdot z}{L}. \quad (379)$$

Разложив все слагаемые данного линейного уравнения в ряды Фурье, а затем приравняв коэффициенты при соответствующих базисных гармонических функциях, мы получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов a_n . Дополнительное уравнение для нахождения C_1 дает нам граничное условие для тока на концах нанотрубки $I_\omega(\pm L/2) = 0$, из которого следует, что

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = 0. \quad (380)$$

Разложение косинуса на отрезке $(-L/2 .. L/2)$ имеет следующий вид:

$$\cos kz = \frac{4 \sin \frac{kL}{2}}{kL} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{2\pi n \cdot z}{L}}{1 - \left(\frac{2\pi n}{kL}\right)^2} \right]. \quad (381)$$

Выпишем разложение кратного интеграла, входящего в уравнение Поклингтона:

$$\begin{aligned}
& \int_{-L/2}^{L/2} D(z-z') I_{\omega}(z') dz' = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} D(z-z') \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n \cdot z'}{L} \right) dz' dz + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} D(z-z') \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n \cdot z'}{L} \right) dz' dz \times \cos \frac{2\pi n \cdot z}{L} \right].
\end{aligned} \tag{382}$$

Оно сводится к следующему выражению:

$$\int_{-L/2}^{L/2} D(z-z') I_{\omega}(z') dz' = \frac{L}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} a_m \cos \frac{2\pi n \cdot z}{L}, \tag{383}$$

в котором элементы матрицы A_{nm} выражаются таким образом:

$$A_{00} = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D\left(\frac{x-y}{b}\right) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} D_z\left(\frac{\eta}{b}\right) (2\pi - \eta) d\eta, \tag{384}$$

$$A_{0m} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D\left(\frac{x-y}{b}\right) \cos(my) dx dy = (-1)^{m+1} \int_0^{2\pi} D\left(\frac{\eta}{b}\right) \frac{\sin m\eta}{m} d\eta, \quad m = \overline{1.. \infty}, \tag{385}$$

$$A_{n0} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D\left(\frac{x-y}{b}\right) \cos(nx) dx dy = (-1)^{n+1} \int_0^{2\pi} D\left(\frac{\eta}{b}\right) \frac{\sin n\eta}{n} d\eta, \quad n = \overline{1.. \infty}, \tag{386}$$

$$\begin{aligned}
A_{nm} &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D\left(\frac{x-y}{b}\right) \cos(nx) \cos(my) dx dy = \\
&= (-1)^{n+m+1} 2 \int_0^{2\pi} D\left(\frac{\eta}{b}\right) \frac{n \sin n\eta - m \sin m\eta}{n^2 - m^2} d\eta, \quad m, n = \overline{1.. \infty} \cap m \neq n.
\end{aligned} \tag{387}$$

$$\begin{aligned}
A_{nn} &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D\left(\frac{x-y}{b}\right) \cos(nx) \cos(ny) dx dy = \\
&= \int_0^{2\pi} D\left(\frac{\eta}{b}\right) \left(\cos(n\eta) (2\pi - \eta) - \frac{\sin n\eta}{n} \right) d\eta \quad n = \overline{1.. \infty}.
\end{aligned} \tag{388}$$

Теперь, ограничившись конечным числом гармоник N , можем выписать матричное уравнение, из которого находится вектор неопределенных коэффициентов

$$MX = -i \frac{2\pi^2 c}{kL} E_{z,\omega} \cdot R, \tag{389}$$

где X — искомый вектор, имеющий размерность $N + 2$:

$$X : \quad X_n = a_n, \quad n = \overline{0..N}, \quad X_{N+1} = \frac{2\pi^2}{L} C_1, \tag{390}$$

вектор R имеет единственную не равную нулю компоненту

$$R_0 = 1, \tag{391}$$

элементы матрицы M следующие:

$$M_{nm} = A_{nm}, \quad n, m = \overline{0..N}, \tag{392}$$

$$M_{N+1,0} = \frac{1}{2}, \quad M_{N+1,m} = (-1)^m \quad m = \overline{1..N}, \quad M_{N+1,N+1} = 0, \tag{393}$$

$$M_{0,N+1} = \frac{2 \sin \frac{kL}{2}}{kL}, \quad M_{n,N+1} = (-1)^n \frac{4 \sin \frac{kL}{2} / (kL)}{1 - \left(\frac{2\pi n}{kL}\right)^2} \quad n = \overline{1..N}. \tag{394}$$

Найдя вектор X , мы решим исходную задачу о поиске распределения тока по длине нанотрубки. Для нахождения распределения погонной плотности заряда вдоль нее, необходимо использовать уравнение, выражающее закон сохранения заряда

$$i\omega\rho_\omega + \frac{\partial I_\omega}{\partial z} = 0,$$

из которого легко получить коэффициенты разложения функции $\rho_\omega(z)$ в ряд Фурье.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

- [1] Cavalcanti A., Shirinzadeh B., Freitas R.A., Hogg T., “Nanorobot architecture for medical target identification,” *Nanotechnology*, **19**, 015103 (2008).
- [2] Cavalcanti A., Shirinzadeh B., Zhang M., Kretly L.C., “Nanorobot Hardware Architecture for Medical Defense,” *Sensors*, **8**, pp. 2932–2958 (2008).
- [3] Cavalcanti A., Shirinzadeh B., Kretly L.C., “Medical nanorobotics for diabetes control,” *Nanomedicine: Nanotechnology, Biology, and Medicine*, **4**, pp. 127–138 (2008).
- [4] Freitas R.A., “Current Status of Nanomedicine and Medical Nanorobotics,” *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, **2**(1), pp. 1–25 (2005).
- [5] Fatikow S., Wich T., Krohs F., Dahmen C., “Towards Automated Handling on the Nanoscale,” *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 464–469 (2008).
- [6] Seigel M., “Smart Sensors and Small Robots,” *IEEE Instrumentation and Measurement Technology*, pp. 303–308 (2001).
- [7] Douglas S.M., Bachelet I., Church G.M., “A Logic-Gated Nanorobot for Targeted Transport of Molecular Payloads,” *Science*, **335**, pp. 831–834 (2012).
- [8] Martel S., Andre W., “Embedding a Wireless Transmitter within the Space and Power Constraints of an Electronic Untethered Microrobot,” *Circuits and Systems and TAISA Conference*, pp. 1-4 (2009).
- [9] Ma G., Yan G., “Wireless Powered Microrobot for Gastrointestinal Detection,” *International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 1085–1089 (2007).
- [10] Popov A.M., Lozovik Yu.E., Fiorito S., Yahia H., “Biocompatibility and applications of carbon nanotubes in medical nanorobots,” *International Journal of Nanomedicine*, **2**(3), pp. 361–372 (2007).
- [11] Darnton N., Turner L., Breuer K., Berg H.C., “Moving Fluid with Bacterial Carpets,” *Biophysical Journal*, **86**, pp. 1863–1870 (2004).
- [12] Martel S., et al, “Towards Swarms of Communication-enabled and Intelligent Sensotaxis-based Bacterial Microrobots Capable of Collective Tasks in an Aqueous Medium,” *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2617–2622 (2009).

- [13] Kornienko S., Kornienko O., Levi P., “Collective AI: context awareness via communication,” *Proceedings of the 19th international joint conference on Artificial intelligence*, pp. 1464-1470 (2005).
- [14] Kornienko S., Kornienko O., Levi P., “Minimalistic approach towards communication and perception in microrobotic swarms,” *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2228–2234 (2005).
- [15] Hamad-Schifferli K., Schwartz J.J., Santos A.T., Zhang S., Jacobson J.M., “Remote electronic control of DNA hybridization through inductive coupling to an attached metal nanocrystal antenna,” *Letters to Nature*, **415**, pp. 152–155 (2002).
- [16] Kim S., Knoll T., Scholz O., “Feasibility of Inductive Communication Between Millimeter- Sized Robots,” *IEEE Transactions on Robotics*, **23**(3), pp. 605–609 (2007).
- [17] Ricciardi L., Pitz I., Al-Sarawi S.F., Varadan V., Abbott D. “Investigation into the Future of RFID in Biomedical Applications,” *Bioengineered and Bioinspired Systems*, **5119**, pp. 199–209 (2003).
- [18] Corradi P., Scholz O., Knoll T., Menciassi A., Dario P., “An optical system for communication and sensing in millimetre-sized swarming microrobots,” *J. Micromech. Microeng.*, **19**, 015022 (2009).
- [19] Sanuy A. *et al*, “Energy Aware HW/SW Integration in an Autonomous Microrobot,” *6th WSEAS Int. Conference on Computational Intelligence*, pp. 225–230 (2007).
- [20] Bruhn F.C., *et al*, “MEMS Enablement and Analysis of the Miniature Autonomous Submersible Explorer,” *IEEE J. of Oceanic Engineering*, **30**(1), pp. 165–178 (2005).
- [21] Gao B., Guo S., “Development of an Infrared Ray Controlled Fish-like Underwater Microrobot,” *IEEE International Conference on Automation and Logistics*, pp. 150–155 (2010).
- [22] Díaz J.A., Gibbs-Davis J.M., “Sharpening the Thermal Release of DNA from Nanoparticles: Towards a Sequential Release Strategy,” *Small*, **9**(17), pp. 2862–2871 (2013).
- [23] Bonini M., Berti D., Baglioni P., “Nanostructures for magnetically triggered release of drugs and biomolecules,” *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, **18**(5), pp. 459–467 (2013).
- [24] Lahiri S. “RFID Sourcebook,” *IBM Press* (2005)

- [25] Hornyak T., “RFID Powder,” *Scientific American*, **298**(2), pp. 68–71 (2008).
- [26] Zichner R., Baumann R.R., “3-D transponder antennas for future SHF RFID applications,” *Adv. Radio Sci.*, **9**, pp. 401–405 (2011).
- [27] Luangxaysana K., Mitatha S., Yoshida M., Komine N., Yupapin P., “High-capacity terahertz carrier generation using a modified add-drop filter for radio frequency identification,” *Optical Engineering*, **51**(8), 085006 (2012).
- [28] Perret E., Hamdi M., Vena A., *et al*, “RF and THz Identification Using a New Generation of Chipless RFID Tags,” *Radioengineering*, **20**(2), pp. 380–386 (2011).
- [29] Hartnagel H.L., “Terahertz Sources, their Technology and Applications,” *AIP Conf. Proc.*, **1328**, pp. 12–16 (2011).
- [30] Seigel P.H. “Terahertz Technology,” *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **50**(3), pp. 910–928 (2002).
- [31] Tonouci M., “Cutting-edge Terahertz Technologies,” *Nature Photonics*, **1**, pp. 97–105 (2007).
- [32] Federici J., Moeller L., “Review of terahertz and subterahertz wireless communications,” *J. of Appl. Phys.*, **10**(11) 111101 (2010).
- [33] Nagatsuma T., “Terahertz technologies: present and future,” *IEICE Electronics Express*, **8**(14), pp. 1127–1142 (2011).
- [34] Dyakonov M.I. and Shur M.S., “Plasma wave electronics: Novel Terahertz Devices Using Two Dimensional Electron Fluid,” *IEEE Trans. on Electron Devices*, **43**(10), pp. 1640–1645 (1996).
- [35] Burke P.J., Rutherglen Z.Yu., “Single-Walled Carbon Nanotubes: Applications in High Frequency Electronics,” *International Journal of High Speed Electronics and Systems*, **16**(4), pp. 977–999 (2006).
- [36] Geim A.K., Novoselov K.S., “The rise of graphene,” *Nature Materials*, **6**(3), pp. 183–191 (2007).
- [37] Ryzhii V.I. *et al*, “Resonant detection of modulated terahertz radiation in micromachined high-electron-mobility transistor”, *Appl. Phys. Lett.*, **90**, P. 203503 (2007).
- [38] Leiman V.G., *et al*, “Analysis of resonant detection of terahertz radiation in high-electron mobility transistor with a nanostring/carbon nanotube as the mechanically floating gate”, *J. Appl. Phys.*, **104**, P. 024514 (2008).

- [39] Stebunov Yu., *et al*, “Detection of Modulated Terahertz Radiation Using Combined Plasma and Mechanical Resonances in Double-Carbon-Nanotube Device,” *Appl. Phys. Exp.*, **4**(7), 075101 (2011).
- [40] Stebunov Yu., *et al*, “Graphene nanoribbon based AM demodulator of terahertz radiation,” *7th IEEE International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems (NEMS)*, pp. 742–746 (2012).
- [41] Choi J.M., Mitin V., Ramaswamy R., Pogrebnyak V.A., *et al*, “THz Hot-Electron Micro-Bolometer Based on Low-Mobility 2-DEG in GaN Heterostructure,” *IEEE Sensors Journal*, **13**(1), pp. 80–88 (2013).
- [42] Mitin V., Ramaswamy R., Wang K., *et al*, “THz detectors based on heating of two-dimensional electron gas in disordered nitride heterostructures,” *Proc. of SPIE*, **8363**, 836307-1 (2012).
- [43] Zhang R., Guo X.G., Song C.Y., *et al*, “Metal-Grating-Coupled Terahertz Quantum-Well Photodetectors,” *IEEE Electron Devices Letters*, **32**(5), pp. 659–661 (2011).
- [44] Rinzan M.B.M., Pereraa A.G.U., *et al*, “AlGaAs emitter/GaAs barrier terahertz detector with a 2.3 THz threshold,” *Applied Physics Letters*, **86**, 071112 (2005).
- [45] Coppinger M.J, Sustersic N.A., *et al*, “Sensitivity of a vanadium oxide uncooled microbolometer array for terahertz imaging,” *Optical Engineering*, **50**(5), 053206 (2011)
- [46] Wang B. *et al*, “Nanostructured vanadium oxide thin film with high TCR at room temperature for microbolometer,” *Infrared Physics & Technology*, **57** pp. 8–13, (2013)
- [47] Tezcan D.S., Eminoglu S., Akin T., “A Low-Cost Uncooled Infrared Microbolometer Detector in Standard CMOS Technology,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, **50**(2), p. 494 (2003)
- [48] Jahanzeb A., *et al*, “A Semiconductor YBaCuO Microbolometer for Room Temperature IR Imaging,” *IEEE Transactions on Electron Devices*, **44**(10), p. 1795 (1997)
- [49] Vera-Reveles G., Simmons T.J., *et al*, “High-Sensitivity Bolometers from Self-Oriented Single-Walled Carbon Nanotube Composites,” *ACS Appl. Mater. Interfaces*, **3**, pp. 3200–3204 (2011)
- [50] Liu X.-M., *et al*, “Study on new structure uncooled a-Si microbolometer for infrared detection,” *Microelectronics Journal*, **38**, pp. 735–739 (2007)

- [51] Muralt P., “Micromachined infrared detectors based on pyroelectric thin films,” *Rep. Prog. Phys.* **64**, p. 1339 (2001)
- [52] Mehdi I., Chattopadhyay G., Schlecht E., Ward J., Gill J., Maiwald F., and Maestrini A., “THz multiplier circuits,” *IEEE MTT-S Intern. Microwave Symp. Digest, San-Francisco*, pp. 341–344 (2006).
- [53] Siegel P.H., Smith R.P., Martin S., and Gaidis M., “2.5 THz GaAs monolithic membrane–diode mixer,” *IEEE T. Microw. Theory Techn.*, **47**, pp. 596–604 (1999).
- [54] Zhang Y., Han R., Kim Y., *et al*, “Schottky Diodes in CMOS for Terahertz Circuits and Systems,” *IEEE Radio and Wireless Symposium*, pp. 43–45 (2013).
- [55] Han R., Zhang Y., Kim Y., *et al*, “Active Terahertz Imaging Using Schottky Diodes in CMOS: Array and 860-GHz Pixel,” *IEEE JOURNAL OF SOLID-STATE CIRCUITS*, **48**(10), P. 2296 (2013).
- [56] Semenov A., Cojocari O., Hübers H.-W., *et al*, “Application of Zero-Bias Quasi-Optical Schottky-Diode Detectors for Monitoring Short-Pulse and Weak Terahertz Radiation,” *IEEE Electron Device Letter*, **31**(7), pp. 694–676 (2010).
- [57] Liu L., Hesler J.L., Xu H., *et al*, “A Broadband Quasi-Optical Terahertz Detector Utilizing a Zero Bias Schottky Diode,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, **20**(9), pp. 504–506 (2010).
- [58] Otsuji T., Hanabe M., Ogawara O., “Terahertz plasma wave resonance of two-dimensional electrons in InGaP/InGaAs/GaAs high-electron-mobility transistors,” *Appl. Phys. Lett.*, **85**(11), pp. 2119–2121 (2004).
- [59] Veksler D., Teppe F., Dmitriev A.P., *et al*, “Detection of terahertz radiation in gated two-dimensional structures governed by dc current,” *Phys. Rev. B*, **73**, 125328 (2006).
- [60] Deng Y., *et al*, “Millimeter wave emission from GaN high electron mobility transistor,” *Appl. Phys. Lett.*, **84**(1), p. 70 (2004).
- [61] Preu S., Lu H., Sherwin M.S., Gossard A.C., “Detection of nanosecond-scale, high power THz pulses with a field effect transistor,” *Rev. Sci. Instrum.*, **83**, 053101 (2012).
- [62] Vitiello M.S., *et al*, “Room-Temperature Terahertz Detectors Based on Semiconductor Nanowire Field-Effect Transistors,” *Nano Lett.*, **12**, pp. 96-101 (2012).
- [63] Nadar S., Videlier H., *et al*, “Room temperature imaging at 1.63 and 2.54 THz with field effect transistor detectors,” *J. Appl. Phys.*, **108**, 054508 (2010).

- [64] Elkhatib T.A., Kachorovskii V.Yu., *et al*, “Terahertz response of field-effect transistors in saturation regime,” *Appl. Phys. Lett.*, **98**, 243505 (2011).
- [65] Nathanson H.C., *et al*, “The resonant gate transistors,” *IEEE Trans. E. Dev.*, **14**, pp. 117–133 (1967).
- [66] Slepyan G.Ya., Maksimenko S.A., *et al*, “Electrodynamics of carbon nanotubes: Dynamic conductivity, impedance boundary conditions, and surface wave propagation,” *Phys. Rev B*, **60**(24), p. 17136 (1999).
- [67] Braginsky V.B., Manukin A.B., “Measurement of Weak Forces in Physics Experiments,” *Chicago: University of Chicago Press* (1977).
- [68] Braginsky V.B., Strigin S.E., Vyatchanin S.P., “Parametric oscillatory instability in Fabry-Perrot (FP) interferometer,” *Physics Letters*, **A287** (5-6), p. 331 (2001).
- [69] Kippenberg T.J., Vahala K.J., “Cavity Opto-Mechanics,” *Optics Express*, **15**(25), 17172 (2007).
- [70] Арсенин А.В., Гладун А.Д., Лейман В.Г., Семенов В.Л., Рыжий В.И., “Параметрическая неустойчивость в наноэлектромеханическом детекторе модулированного терагерцевого излучения на основе транзистора с высокой подвижностью электронов и подвижным упругим затвором,” *Радиотехника и электроника*, **54**(11), сс. 1394–1402 (2009).
- [71] Арсенин А.В., Гладун А.Д., Лейман В.Г., Семенов В.Л., Рыжий В.И., “Параметрическая неустойчивость в резонансном детекторе модулированного терагерцевого излучения на основе полевого транзистора с цилиндрическим затворным электродом,” *Радиотехника и электроника*, **56**(10), сс. 1254–1260 (2011).
- [72] Semenenko V., Leiman V., Arsenin A., Stebunov Yu., Ryzhii V., “Excitation of mechanical oscillations in double-carbon-nanotube system by terahertz radiation,” *Nano/Micro Engineered and Molecular Systems (NEMS), 7th IEEE International Conference on*, pp. 631–635 (2012).
- [73] Luoissell W.H., “Coupled mode and parametric electronics,” *New York: Wiley* (1960).
- [74] Arcizet O., Cohadon P.F., Briant T., *et al*, “Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micromirror,” *Nature*, **444**, p. 71 (2006).
- [75] Rokhsari H., Kippenberg T.J., Carmon T., Vahala K.J., “Theoretical and Experimental Study of Radiation Pressure-Induced Mechanical Oscillations (Parametric Instability) in Optical Microcavities,” *IEEE Journal on Selected Topics in Quantum Electronics*, **12**(1), pp. 96–107 (2006).

- [76] Ekinci K.L., Roukes M.L., “Nanoelectromechanical systems”, *Rev. Sci. Instrum.*, **76**, 061101 (2005).
- [77] Craighead H.G. “Nanoelectromechanical systems,” *Science*, **290** p. 1532 (2000).
- [78] Cleland A.N., Roukes M.L., “Noise processes in nanomechanical resonators,” *Appl. Phys. Lett.*, **92**(5), pp. 2758–2769 (2002).
- [79] Semenenko V.L., *et al*, “Effect of self-consistent electric field on characteristics of graphene p-i-n tunneling transit-time diodes,” *J. of Appl. Phys.*, **113**, 024503 (2013).
- [80] Chaplik A.V., “Possible Crystallization of Charge Carriers in Low-Density Inversion Layers,” *Sov. Phys. JETP*, **35**(2), pp. 395–398 (1972).
- [81] Chaplik A.V., “Absorption and Emission of Electromagnetic Waves by Two-dimensional Plasmons,” *Surface Science Reports*, **5**, pp. 289-336 (1985).
- [82] White C.T., Mintmire J.W., “Fundamental Properties of Single-Wall Carbon Nanotubes,” *J. Phys. Chem. B*, 109, 52-65 (2005).
- [83] Maffucci A., Miano G., Villone F. “A transmission line model for metallic carbon nanotube interconnects,” *Int. J. Circ. Theor. Appl.*, **36**, pp. 31–51 (2008).
- [84] Burke P.J., *et al*, “Quantitative Theory of Nanowire and Nanotube Antenna Performance,” *IEEE Trans. on Nanotech.*, **5**(4), pp. 314–334 (2006).
- [85] Арсенин А.В., Гладун А.Д., Лейман В.Г., Семенов В.Л., Рыжий В.И. “Плазменные колебания двумерного электронного газа в полевом транзисторе с цилиндрическим затворным электродом,” *Радиотехника и электроника*, 55(11), сс. 1376–1386 (2010).
- [86] Hanson G.W., “Fundamental Transmitting Properties of Carbon Nanotube Antennas,” *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 53(11), p. 3426 (2005).
- [87] Shuba M.V., Slepyan G.Ya., Maksimenko S.A., “Theory of multiwall carbon nanotubes as waveguides and antennas in the infrared and the visible regimes,” *Phys. Rev. B*, 79(15), p. 155403 (2009).
- [88] Hanson G.W., “New Formulation of Pocklington’s Equation for Thin Wires Using the Exact Kernel,” *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 59(11), p. 4355 (2011).
- [89] Semenenko V., Leiman V., Arsenin A., Stebunov Yu., Ryzhii V., “Excitation of mechanical oscillations in double-carbon-nanotube system by terahertz radiation,” *Nano/Micro Engineered and Molecular Systems (NEMS), 7th IEEE International Conference on*, pp. 631-635 (2012).

- [90] Jensen K., Weldon J., Garcia H., Zettl A., “Nanotube Radio,” *Nano Lett.*, **7**(11), pp. 3508–3511 (2007).
- [91] Huttel A.K. *et al*, “Carbon Nanotubes as Ultrahigh Quality Factor Mechanical Resonators”, *Nano Lett.*, **9**(7), P. 2547 (2009).